

Trabajo de Grado:

Acople de elementos finitos y elementos de frontera para resolver  
un problema de interacción fluido-estructura

Por Mat. Eraus Martinez

Dirigido por Dr. Catalina Domínguez

MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS  
DIVISION DE CIENCIAS BÁSICAS  
UNIVERSIDAD DEL NORTE  
BARRANQUILLA  
2013



# Resumen

Esta tesis aborda un acople de elementos finitos FEM y elementos de frontera BEM para resolver un problema de interacción fluido estructura. El problema consiste en determinar la dinámica del fluido viscoso, compresible y homogéneo, junto con el desplazamiento de un sólido elástico inmerso en el fluido, dada una vibración armónica en el sistema. Mostraremos el núcleo de los operadores integrales provenientes de la ecuación de elastodinámica en términos de las funciones de Hankel y sus respectivas derivadas.

Además, en este trabajo se presentan estimadores de error residual a posteriori para dos formulaciones variacionales. La primera un acople FEM/ BEM analizadas en Hsiao [10]; la segunda formulación variacional de acople FEM/FEM basados en las ideas de Stewart y Hughes [14] quienes estudian la ecuación de Helmholtz en dominios exteriores.

También se muestran experimentos numéricos usando el método de elementos finitos para los problemas con condiciones de frontera tipo Neumann en el sólido y en el fluido, tratados separadamente. Adicionalmente se presentan resultados numéricos para un acople FEM/FEM y su respectivo estimador residual a posteriori. Los resultados numéricos confirman los resultados teóricos.



# Introducción

El problema de determinar la manera como una onda acústica es reflejada por un cuerpo elástico inmerso en un fluido es un caso especial de un problema de interacción fluido-estructura. Una manera de examinar estos fenómenos es usar métodos numéricos. Éstos transforman el problema físico dentro de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales las cuales pueden ser resueltas usando diferentes métodos de discretización. El método de elementos de frontera (BEM) se ha convertido en las últimas décadas en una herramienta versátil y potente utilizado para tal fin, en especial en aquellos problemas de dominio exterior que involucran dominios no acotados. En otros casos, en los cuales es necesario analizar fenómenos que involucren tanto un dominio interior (acotado) como otro exterior, es conveniente combinar este método con el método de elementos finitos (FEM), este proceso se conoce con el nombre de acople entre elementos finitos y elementos de frontera (FEM/BEM).

En nuestro caso, el problema consiste en determinar la dinámica del fluido  $\tilde{\Omega}$  viscoso, compresible y homogéneo, junto con el desplazamiento de un sólido elástico  $\Omega$  inmerso en el fluido, dada una vibración armónica del fluido. Aquí  $\Omega$  es una región acotada en  $\mathbb{R}^2$ , con frontera  $\Gamma$  y  $\tilde{\Omega}$  el complemento de  $\bar{\Omega}$ . Mostraremos el núcleo de los operadores integrales, provenientes de la ecuación de elastodinámica en términos de las funciones de Hankel y sus respectivas derivadas, pues involucra el cálculo de gradientes y a su vez funciones definidas mediante series. En [2, 8, 11, 10] se analiza un problema similar usando un fluido no-viscoso, esta consideración determina diferentes ecuaciones integrales provenientes de la ecuación de Helmholtz, produciendo diferentes formulaciones de acople FEM/BEM un poco mas sencillas de implementar y de analizar.

En este trabajo se presentan estimadores de error residual a posteriori para dos formulaciones variacionales. La primera de acople FEM/ BEM analizadas en Hsiao [10], donde la forma sesquilineal asociada a esta formulación satisface la desigualdad de Gårding. Este tipo de problemas satisfacen la alternativa de Fredholm: el problema variacional tiene una única solución ó existe una solución no trivial del problema homogéneo. Por lo tanto, la existencia de la solución se sigue si se puede demostrar la unicidad.

La segunda formulación variacional de acople FEM/FEM esta basada en las ideas de Stewart y Hughes [14] quienes estudian la ecuación de Helmholtz en dominios exteriores.

Los estimador de error residual para las formulaciones variacionales del problema fluido-estructura se formulan en la norma  $L^2$  utilizando técnicas estándar para métodos de FEM, véase, por ejemplo Johnson [15] o Braess [3] y técnicas de FEM/BEM métodos de acoplamiento, véase, por ejemplo Carstensen [4, 6, 5].

Con el estimador de error residual a posteriori se puede calcular indicadores locales de error sobre cada triángulo y refinar aquellos donde el indicador es mayor. Con esté procedimiento, es posible mejorar la convergencia del método y a su vez el tiempo de cálculo podría disminuir si se aplica una estrategia adaptativa.

La estructura de la presente tesis viene dada por:

En el primer capítulo recordaremos las principales definiciones de los espacios apropiados para nuestras soluciones y nos concentraremos en las ecuaciones integrales de frontera de la ecuación de elastodinámica y describir algunas propiedades básicas.

El segundo capítulo esta dedicado al problema fluido-estructura, donde el análisis descrito hace parte del trabajo de Hsiao [12]. En la sección 2.1 se presentan las formulaciones variacionales de acople FEM/BEM y acople FEM/FEM y en la sección 2.2 la discretización usando el método de Galerkin con funciones de prueba lineales.

El tercer capítulo descompondremos el núcleo de ecuación de elastodinámica en términos de las funciones de Hankel y sus respectivas derivadas, los cuales involucran el cálculo de gradientes y funciones definidas mediante series.

En el cuarto capítulo se presentan algunos de los aporte de este trabajo los cuales son dos teoremas que derivan un estimador de error a posteriori para las formulaciones variaciones de los acople FEM/BEM y FEM/FEM.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentaran los resultados numéricos para el problema de interacción fluido-estructura. Se muestran experimentos numéricos usando el método de elementos finitos para los problemas con condiciones de frontera tipo Neumann en el sólido y en el fluido, tratados separadamente. Además, se calcula numéricamente el estimador de error tipo residual a posteriori presentado en el Teorema 4.4 de la formulación variacional de acople FEM/FEM.





# Índice general

<b>1. Notación y Definiciones</b> .....	1
1.1. Operadores Integrales de Frontera .....	3
<b>2. Planteamiento del problema</b> .....	5
2.1. Formulación Variacional .....	9
2.1.1. Acople FEM-BEM .....	10
2.1.2. Acople FEM-FEM .....	11
2.1.3. Existencia y unicidad de la formulación variacional .....	13
2.2. Método de Galerkin .....	14
2.2.1. Discretización .....	14
2.2.2. Elementos finitos y de frontera .....	15
2.2.3. Problema discreto .....	16
2.2.4. Estimador de error apriori .....	16
2.2.5. Tasa de Convergencia .....	17
<b>3. El Kernel de los Operadores integrales</b> .....	19
<b>4. Estimador de error a posteriori - tipo residual</b> .....	25
<b>5. Experimentos Numéricos</b> .....	37
5.1. Problema interno usando FEM .....	39
5.2. Problema Externo usando FEM .....	41
5.3. Interacción fluido-estructura .....	42
<b>Referencias</b> .....	49



# Capítulo 1

## Notación y Definiciones

Comenzaremos en este capítulo con una breve introducción a los principales conceptos y definiciones asociado a los espacios de Sobolev, los operadores integrales de frontera y las relaciones de salto que cumplen estos operadores que son de gran importancia para nuestro trabajo.

Considerando un dominio acotado, simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con frontera cerrada suave  $\Gamma := \partial\Omega$  y el exterior con  $\tilde{\Omega} := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ .

**Definición 1.1.** El espacio  $L^2(\Omega)$  se define como el conjunto de todas las funciones  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  que son cuadrado integrable sobre  $\Omega$  en el sentido de Lebesgue.

$L^2(\Omega)$  es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_0 := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2} := \int_{\Omega} \mathbf{u}(x) \bar{\mathbf{v}}(x) dx$$

y la norma correspondiente.

$$\|\mathbf{u}\|_0 = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_0}.$$

**Definición 1.2.** Sea  $\mathbb{Z}_+^n$  el conjunto de todas la n-uplas de enteros no negativas, un elemento de  $\mathbb{Z}_+^n$  se denota por  $\alpha$  ó  $\beta$  (por ejemplo  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ). Denotaremos por  $|\alpha|$  la suma  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  y por  $D^\alpha \mathbf{u}$  la derivada parcial

$$\partial^\alpha \mathbf{u} := \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{u}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

Así, si  $|\alpha| = m$ , entonces  $D^\alpha \mathbf{u}$  denota la m-ésima derivada parcial de  $\mathbf{u}$ .

**Definición 1.3.** El espacio de Sobolev denotado por  $H^m(\Omega)$  para un entero  $m \geq 0$  es definido por

$$H^m(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) \mid \partial^\alpha \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

El producto escalar en  $H^m(\Omega)$  es definido por

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_m := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha \mathbf{u}, \partial^\alpha \mathbf{v})_0,$$

la norma asociada

$$\|\mathbf{u}\|_m := (\mathbf{u}, \mathbf{u})_m^{1/2} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_0^2 \right)^{1/2},$$

y la correspondiente semi-norma

$$|\mathbf{u}|_m := \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \mathbf{u}\|_0^2 \right)^{1/2}.$$

La generalización en el caso de los espacios de Sobolev sobre la frontera  $\Gamma$  de reales positivo con orden  $s = k + r$ , donde  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $r \in (0, 1)$  se realiza por la correspondiente norma de Sobolev-Slobodeckii

$$\|\mathbf{u}\|_s := \left( \|\mathbf{u}\|_k^2 + |\mathbf{u}|_r^2 \right)^{1/2}$$

con la semi-norma

$$|\mathbf{u}|_r := \left( \sum_{|\alpha|=r} \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\partial^\alpha \mathbf{u}(x) - \partial^\alpha \mathbf{u}(y)|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{1+2r}} ds_x ds_y \right)^{1/2}.$$

Se introducen los espacios de Sobolev  $H^{-s}(\Gamma)$  de orden negativos para  $s \in (0, l]$  como el dual de  $H^s(\Gamma)$

$$H^{-s}(\Gamma) = (H^s(\Gamma))', \quad s > 0,$$

con la norma

$$\|\mathbf{u}\|_{-s} := \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H^s(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_s}.$$

Y empleando el producto dual para  $u \in H^s(\Gamma)$  y  $v \in H^{-s}(\Gamma)$

$$\langle u, v \rangle := \int_{\Gamma} u(x) \overline{v(x)} ds_x,$$

A lo largo de esta tesis, se utilizarán subíndices en el producto dual como  $\langle u, v \rangle_{\Gamma}$  o  $\langle u, v \rangle_{0,s}$  o  $\langle u, v \rangle_{0,\Gamma}$  cada vez que sea importante distinguir el dominio o el orden del espacio.

## 1.1. Operadores Integrales de Frontera

Para la definición de los operadores integrales de frontera necesitamos la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz  $\gamma_k : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\gamma_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{-i}{2} H_0^1(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (1.1)$$

donde  $H_0^1$  es la función Hankel de primera especie y de orden cero.

El tensor fundamental de desplazamiento de la ecuación elastodinámica  $\tilde{\mathbf{G}}$  puede escribirse como

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{\tilde{\mu}} \gamma_{\tilde{k}_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I + \frac{1}{\tilde{\rho} \omega^2} \nabla \nabla (\gamma_{\tilde{k}_p}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_{\tilde{k}_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Ahora, para  $\mathbf{x} \in \Omega$  o  $\mathbf{x} \in \tilde{\Omega}$ , el *potencial de capa simple* se define por

$$\tilde{S}(\phi)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_y, \quad (1.2)$$

y el *potencial de capa doble* por

$$\tilde{D}(\phi)(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} ds_y, \quad (1.3)$$

donde  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} := \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$  indica la derivada normal de  $\phi$  sobre  $\Gamma$ . Consideramos los siguientes operadores integrales: Para  $\mathbf{x} \in \Gamma$ ,  $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  definimos el *operador de capa simple* como

$$\tilde{V}(\phi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_y,$$

el *operador de capa doble*

$$\tilde{K}(\phi)(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} ds_y,$$

el adjunto del operador de capa doble

$$\tilde{K}'(\phi)(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_y,$$

y el operador hipersingular

$$\tilde{W}(\phi)(\mathbf{x}) := -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ds_y.$$

Tomando el límite  $\mathbf{x} \rightarrow \Gamma$  de (1.2) y (1.3) y su derivada normal, lo que produce las siguientes relaciones de salto:

$$\begin{aligned} \tilde{S}\phi^{\pm} &= \tilde{V}\phi, \\ \tilde{D}\phi^{\pm} &= \left(\tilde{K} \pm \frac{I}{2}\right)\phi, \\ \frac{\partial}{\partial n} \tilde{S}\phi^{\pm} &= \left(\tilde{K}' \mp \frac{I}{2}\right)\phi, \\ \frac{\partial}{\partial n} \tilde{D}\phi^{\pm} &= -\tilde{W}\phi, \end{aligned} \tag{1.4}$$

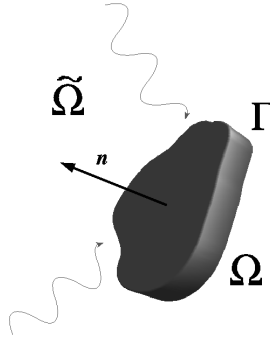
donde los índices de la parte de arriba “−” o “+” indican de que dirección (interior o exterior) el límite que se esta tomando.

## Capítulo 2

### Planteamiento del problema

A continuación presentaremos las ecuaciones asociadas a nuestro problema de interacción fluido-estructura. Considerando un dominio acotado, simplemente conexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  con frontera cerrada suave  $\Gamma := \partial\Omega$  y el exterior con  $\tilde{\Omega} := \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$ , ver figura (2.1).

La situación física puede ser descrita de la siguiente manera. Se considera un cuerpo elástico  $\Omega$  sumergido en un líquido  $\tilde{\Omega}$  viscoso. El problema en cuestión consiste determinar el desplazamiento en  $\tilde{\Omega}$  y a su vez el desplazamiento del líquido en el cuerpo elástico  $\Omega$  debido a una excitación en el líquido  $\tilde{\Omega}$ .



**Figura 2.1** Interacción fluido-estructura.

En el fluido  $\tilde{\Omega}$  las ecuaciones relacionadas que dependen del tiempo, ver [1] son:

Momento

$$\tilde{\rho} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla P + \mu_f \left[ \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right] \quad (2.1)$$

continuidad

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \tilde{\rho} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.2)$$

y estado

$$P = \tilde{c}^2 \rho_f \quad (2.3)$$

donde  $P$ ,  $\rho_f$  y  $\mathbf{V}$  se refieren a la presión en función del tiempo, la densidad y la velocidad en el fluido  $\tilde{\Omega}$  respectivamente.

Además  $\tilde{\rho}$ ,  $\mu_f$  y  $\tilde{c}$  son las constantes de densidad de equilibrio independiente del tiempo, la viscosidad y la velocidad del sonido en el fluido  $\tilde{\Omega}$  respectivamente.

Suponiendo un sistema armónico las funciones anteriores están dadas por

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = -iw\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{-iwt} \quad (2.4)$$

$$P(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x})e^{-iwt} \quad (2.5)$$

$$\rho_f(\mathbf{x}, t) = \tilde{\rho}_f(\mathbf{x})e^{-iwt} \quad (2.6)$$

Ahora vamos a definir las constantes de Lamé en el fluido  $\tilde{\Omega}$  de la siguiente manera:

$$\tilde{\mu} := -iw\mu_f, \quad \tilde{\lambda} := \tilde{\rho}\tilde{c}^2 + \frac{2}{3}iw\mu_f. \quad (2.7)$$

Además definiremos los números de onda  $\tilde{k}_p$  y  $\tilde{k}_s$  dados por:

$$\tilde{k}_p^2 := \frac{w^2}{\tilde{c}^2} \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}\tilde{c}^2} \right]^{-1} = \frac{\tilde{\rho}w^2}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}, \quad \tilde{k}_s^2 := \frac{\tilde{\rho}w^2}{\tilde{\mu}}. \quad (2.8)$$

Ahora con esta nueva notación tenemos lo siguiente:

De la ecuación (2.3) reemplazamos la ecuaciones (2.5) y (2.6) se tiene que

$$p - \tilde{c}^2 \tilde{\rho}_f = 0 \quad , \quad (2.9)$$

además utilizando la ecuación (2.2) reemplazamos las ecuaciones (2.4) y (2.6) tenemos

$$-iwe^{-iwt}\tilde{\rho}_f + \tilde{\rho}\nabla \cdot (-iw\tilde{\mathbf{u}}e^{-iwt}) = 0 \quad ,$$



luego factorizando obtenemos

$$\tilde{\rho}_f + \tilde{\rho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad ,$$

ahora multiplicamos por  $\tilde{c}^2$  resulta

$$\tilde{c}^2 \tilde{\rho}_f + \tilde{c}^2 \tilde{\rho} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad ,$$

reemplazando la ecuación (2.9) se tiene

$$p + \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Por ultimo utilizando la ecuación (2.1) reemplazamos las ecuaciones (2.4) y (2.5) se tiene

$$\tilde{\rho}(-w^2 \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt}) = -\nabla p e^{-iwt} + \mu_f \left[ \Delta(-iw \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt}) + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot (-iw \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt})) \right] \quad ,$$

entonces reemplazando la ecuación (2.10) tenemos

$$\tilde{\rho}(-w^2 \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt}) = \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt}) + \mu_f \left[ \Delta(-iw \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt}) + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot (-iw \tilde{\mathbf{u}} e^{-iwt})) \right] \quad ,$$

luego factorizando obtenemos

$$\tilde{\rho} w^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + \mu_f \left[ \Delta(-iw \tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot (-iw \tilde{\mathbf{u}})) \right] = \mathbf{0} \quad ,$$

entonces

$$-iw \rho_f \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \left( \frac{-1}{3} iw \mu_f + \tilde{\rho} \tilde{c}^2 \right) \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\rho} w^2 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad .$$

Puesto que

$$\tilde{\mu} = -iw \mu_f, \quad (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) = -iw \mu_f + \tilde{\rho} \tilde{c}^2 + \frac{2}{3} iw \mu_f = \frac{-1}{3} iw \mu_f + \tilde{\rho} \tilde{c}^2.$$

Finalmente obtenemos la ecuación elastodinámica

$$\tilde{\mu}\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\rho}w^2\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

o bien

$$\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{\rho}w^2\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

donde  $\sigma(\tilde{\mathbf{u}}) := \tilde{\mu}\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})$  es el tensor de esfuerzo.

Por otra parte, para el cuerpo elástico  $\Omega$  sometido a los movimientos armónicos y a una fuerza armónica en el tiempo  $F(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ , luego el desplazamiento  $\mathbf{u}$  se rige por la misma ecuación:

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \rho w^2\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.13)$$

donde  $\rho$  es la densidad del cuerpo.

El operador tracción en la frontera  $\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}$  esta definido por:

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} := 2\mu\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda\hat{n}\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\hat{n} \times \nabla \times \mathbf{u}. \quad (2.14)$$

El operador correspondiente en el fluido  $\sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{n}$ , se define similarmente con  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\lambda}$  sustituyéndolo por  $\mu$ ,  $\lambda$ .

Así, el problema a considerar en este trabajo consiste en encontrar los desplazamientos  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  en  $\tilde{\Omega}$  y  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  en  $\Omega$  tales que:

$$\tilde{\mathbf{u}} \in C^2(\tilde{\Omega}) \cap C^1(\tilde{\Omega} \cup \Gamma) \quad y \quad \mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma)$$

y satisfacen:

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + w^2\rho\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad en \quad \Omega \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) + w^2\tilde{\rho}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad en \quad \tilde{\Omega} \quad (2.16)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}, \quad en \quad \Gamma \quad (2.17)$$

$$\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc})\mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}})\mathbf{n} = \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n}, \quad en \quad \Gamma \quad (2.18)$$

donde  $w$  corresponde a la frecuencia del sistema y  $\tilde{\mathbf{u}}^{inc}$  es un campo incidente dado.

Además el desplazamiento  $\tilde{\mathbf{u}}$  satisfacen las condiciones de radiación, cuando  $r := |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , dada por

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_s}{\partial r} - i\tilde{k}_s \tilde{\mathbf{u}}_s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_p}{\partial r} - i\tilde{k}_p \tilde{\mathbf{u}}_p = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.20)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{u}}_p := -\frac{1}{\tilde{k}_p^2} \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}), \quad \tilde{\mathbf{u}}_s := \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_p$$

Los resultados de unicidad para el problema de interacción fluido-estructura ha sido obtenidos del trabajo de Jones D. [16], el cual presenta las condiciones necesarias que tienen que cumplir los parámetros de Lamé.

**Teorema 2.1.** ([12], Teorema 2.1 )

Si  $\tilde{\mathbf{u}}^{inc} = \mathbf{0}$  y los parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  satisfacen  $|\mu| > 0$ ,  $|\lambda + 2\mu| > 0$  y además una de las siguientes condiciones:

1)  $Im\mu \leq 0$ ,  $Im(\lambda + 2\mu) \leq 0$ ,  $Im(w^2\rho) < 0$

2)  $Im\mu < 0$ ,  $Im(\lambda + 2\mu) < 0$ ,  $w^2\rho > 0$

3)  $\mu > 0$ ,  $\lambda + 2\mu > 0$ ,  $w^2\rho > 0$

en  $\Omega$ ; mientras que  $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, w^2, \tilde{\rho})$  satisfacen las anteriores condiciones en  $\tilde{\Omega}$  entonces el problema (2.15)-(2.20) tiene solo la solución trivial.

## 2.1. Formulación Variacional

En esta sección se presentan dos formulaciones variacionales para el problema (2.15)-(2.18) de interacción fluido-estructura, la primera usando elementos finitos y elementos de frontera, es decir, un acople FEM/BEM ver Hsiao y Ralph [12], la segunda basada en las ideas de Stewart y Hughes [14], los cuales adicionaron una frontera exterior a fin de poder aplicar elementos finitos sobre el dominio exterior.

### 2.1.1. Acople FEM-BEM

Ahora presentaremos la formulación variacional del problema (2.15)-(2.18) mostrada en el trabajo Hsiao y Ralph [12]. Multiplicando la ecuación (2.16) por una función test  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$  e integrado por partes tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + w^2 \rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx - \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx = \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx = \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx = \langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \tilde{\mathbf{t}}^{inc}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde  $\tilde{\mathbf{t}} := \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}$  y  $\tilde{\mathbf{t}}^{inc} := \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}$ . Tomando la fórmula de representación

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \tilde{D} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \tilde{S} \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \tilde{\Omega}$$

donde  $\tilde{S}$  y  $\tilde{D}$  son el potencial de capa simple y el potencial de capa doble respectivamente, ver (1.2) y (1.3). Tomando el límite hacia la frontera  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma^-} &= (\mathbf{x} \longrightarrow \tilde{D} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \tilde{S} \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}))|_{\Gamma^+} \\
\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma^-} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\mathbf{x} \longrightarrow \tilde{D} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \tilde{S} \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}))|_{\Gamma^+}
\end{aligned}$$

donde  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$  denotan, respectivamente, el límite interior y exterior sobre  $\Gamma$ , usando las condiciones de salto implica

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) &= (\tilde{K} + \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \\
\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= -\tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{2.22}$$

reemplazando en (2.17) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \tilde{K}\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \tilde{V}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= (\frac{I}{2} - \tilde{K})\tilde{\mathbf{u}}^{inc}(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \tilde{W}\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \tilde{K}'\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) + \tilde{W}\tilde{\mathbf{u}}^{inc}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

por lo tanto, para  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$  y  $\tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  se obtiene

$$\frac{1}{2}\langle \tau, \mathbf{u} \rangle - \langle \tau, \tilde{K}\mathbf{u} \rangle + \langle \tau, \tilde{V}\tilde{\mathbf{t}} \rangle = \langle \tau, (\frac{I}{2} - \tilde{K})\tilde{\mathbf{u}}^{inc} \rangle \quad (2.23)$$

$$-\frac{1}{2}\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{W}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{K}'\tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \tilde{W}\tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \mathbf{v} \rangle \quad (2.24)$$

Finalmente, reemplazamos (2.24) en (2.21) y adicionando (2.23) se obtiene la siguiente formulación variacional de las ecuaciones (2.15) - (2.18):

Encontrar  $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \in \mathcal{H}_1 := H^1(\Omega) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  tal que

$$A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}; \mathbf{v}, \tau) = F(\mathbf{v}, \tau) \quad \text{para cualquier } (\mathbf{v}, \tau) \in \mathcal{H}_1 \quad (\mathbf{PV})$$

donde

$$\begin{aligned}A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}; \mathbf{v}, \tau) &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \rho w^2 a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}\langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle + \\ &+ \langle \tilde{W}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{K}'\tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tau, \mathbf{u} \rangle - \langle \tau, \tilde{K}\mathbf{u} \rangle + \langle \tau, \tilde{V}\tilde{\mathbf{t}} \rangle\end{aligned} \quad (2.25)$$

$$F(\mathbf{v}, \tau) := \langle \tilde{W}\tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc}, \mathbf{v} \rangle + \langle \tau, (\frac{I}{2} - \tilde{K})\tilde{\mathbf{u}}^{inc} \rangle - a_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad (2.26)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx \quad (2.27)$$

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \quad (2.28)$$

### 2.1.2. Acople FEM-FEM

Ahora presentamos la segunda formulación variacional considerada en este trabajo. Siguiendo las ideas de Stewart, supongamos una frontera artificial  $\Gamma_a$  en el fluido  $\tilde{\Omega}$ .

Multiplicando la ecuación (2.16) por una función de test  $\tilde{\mathbf{v}} \in H^1(\tilde{\Omega})$  e integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) + w^2 \tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} dx = \mathbf{0} \\
& \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla \tilde{\mathbf{v}} dx - w^2 \tilde{\rho} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dx + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a} = \mathbf{0} \\
& \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla \tilde{\mathbf{v}} dx - w^2 \tilde{\rho} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dx - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a} = -\langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} \\
& \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla \tilde{\mathbf{v}} dx - w^2 \tilde{\rho} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dx - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a} = -\langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} \\
& \int_{\Omega} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) : \nabla \tilde{\mathbf{v}} dx - w^2 \tilde{\rho} \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} dx + \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a} = \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma}
\end{aligned}$$

entonces

$$a(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) - w^2 \tilde{\rho} a_0(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a} = \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma}. \quad (2.29)$$

Observemos que obtenemos un nuevo término sobre la frontera artificial, puesto que no necesariamente se conoce el valor de  $\tilde{\mathbf{u}}$  sobre esta frontera, necesitamos un operador  $\mathcal{M}$  que relacione el campo de desplazamiento  $\tilde{\mathbf{u}}$  con su tensor de tracción normal, es decir, un operador  $\mathcal{M}$  de tipo DtN map (en ingles Dirichlet to Neuman Map), existen varias técnicas para definir el operador  $\mathcal{M}$ , una de ellas es utilizar los operadores integrales asociados a la ecuación de elastodinámica, usando la ecuación integral  $\tilde{V}\tilde{t} = (\tilde{K} \pm \frac{I}{2})\tilde{\mathbf{u}}$  tenemos que  $\mathcal{M} := \tilde{V}^{-1}(\tilde{K} + \frac{I}{2})\tilde{\mathbf{u}}$ . Entonces

$$a(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) - w^2 \tilde{\rho} a_0(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} - \langle \mathcal{M} \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a} = \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma}. \quad (2.30)$$

Ahora multiplicando la ecuación (2.15) por una función test  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$  e integrado por partes tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + w^2 \rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx - \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx = \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\
& \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - w^2 \rho \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dx - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Usando la ecuación(2.17), adicionandola a la ecuación debil (2.31) se tiene

$$\begin{aligned}
& a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \rho w^2 a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \\
& = \langle \tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - a_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}). \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Finalmente adicionando las ecuaciones (2.32) y (2.30) se obtiene la formulación variacional de las ecuaciones (2.15) - (2.18):

Encontrar  $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \mathcal{H}_2 := H^1(\Omega) \times H^1(\tilde{\Omega})$  tal que

$$A_1(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = F_1(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) \quad \text{para cualquier } (\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) \in \mathcal{H}_2 \tag{PV1}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) - \rho w^2 a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \tilde{\rho} w^2 a_0(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \\
&+ \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \langle \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \langle \sigma(\mathbf{u}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} - \langle \mathcal{M} \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$F_1(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) := \langle \tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - a_0(\mathbf{f}, \mathbf{v}) + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma} \tag{2.34}$$

### 2.1.3. Existencia y unicidad de la formulación variacional

La existencia y unicidad de la formulación variacional (PV) o acople FEM/BEM se puede concluir de una generalización del caso definido positivo, esto es, la teoría de las formas variacionales que satisfacen la desigualdad de Gårding. Este tipo de problemas satisfacen la alternativa de Fredholm: el problema variacional tiene una única solución ó existe una

solución no trivial del problema homogéneo. Por lo tanto, la existencia de la solución se sigue si se puede demostrar la unicidad. Un elemento clave son los siguientes teoremas del trabajo de Hsiao y Ralph [12]:

**Teorema 2.2.** ([12], Teorema 3.1 )

La forma sesquilineal  $A$  definida en  $(\mathbf{PV})$  satisface la desigualdad de Gårding, es decir,

$$\operatorname{Re} A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}; \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \geq \alpha \{ \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{\mathbf{t}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \} - \operatorname{Re} C(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}; \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \quad \forall (\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \in \mathcal{H}_1$$

donde  $\alpha > 0$  y  $C$  es una forma sesquilineal compacta en  $\mathcal{H}_1$

**Teorema 2.3.** ([12], Teorema 5.1 )

Si los parámetros de los materiales  $(\mu, \lambda, \rho)$  y  $(\tilde{\mu}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho})$  satisfacen las restricciones del Teorema 2.1 y si  $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \in \mathcal{H}_1$  satisface

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}; \mathbf{v}, \tau) &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \rho w^2 a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \langle \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle + \\ &+ \langle \tilde{W} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{K}' \tilde{\mathbf{t}}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tau, \mathbf{u} \rangle - \langle \tau, \tilde{K} \mathbf{u} \rangle + \langle \tau, \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Entonces  $(u, \tilde{\mathbf{t}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

Como se indico anteriormente los Teoremas 2.2 y 2.3 garantizan la existencia de la única solución débil del problema  $(\mathbf{PV})$  donde las constantes de Lamé estan regidas por las condiciones de Teorema 2.1.

## 2.2. Método de Galerkin

### 2.2.1. Discretización

Sea  $\mathcal{T}_h$  es una descomposición regular de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , en triángulos no traslapados  $\tau$  de diámetro  $h_\tau$ , donde  $h := \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$ . Asumimos que  $\mathcal{T}_h$  es cuasi-uniforme de tamaño  $h > 0$  y forma regular en el sentido de Ciarlet [7], es decir, existe una constante positiva  $k$  talque

$$\frac{h_\tau}{\rho_\tau} \leq k \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h$$



donde  $\rho_\tau := \max\{r : B_r \subseteq \mathcal{T}_h\}$ ,  $B_r := \{x : x - x_0 < r, x_0 \in \mathcal{T}_h\}$ .

Sea  $S_{\Gamma, \bar{h}}$  el conjunto de lados  $s$  o elementos de frontera de la triangulación  $\mathcal{T}_h$  de longitud  $\bar{h}_s$ , donde  $\bar{h} := \max_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \bar{h}_s$ . También asumimos que  $S_{\Gamma, \bar{h}}$  es una descomposición regular en el sentido Ciarlet.

Similarmente definimos una descomposición regular para  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  donde la denotaremos por  $\tilde{\mathcal{T}}_h$ .

### 2.2.2. Elementos finitos y de frontera

En esta sección definiremos nuestro espacio de aproximación.

Sea  $P_1$  el conjunto de polinomios de grado  $\leq 1$  en dos variables. Sea  $W_1^h \subset H^1(\Omega)$  el espacio de los polinomios continuos con respecto a una descomposición de  $\Omega$  definida por

$$W_1^h = \{\eta \in C^0(\Omega) : \eta|_\tau \in P_1 \text{ para todo } \tau \in \mathcal{T}_h\}$$

Sea  $W_2^h \subset H^1(\tilde{\Omega})$  el espacio de los polinomios continuos con respecto a una descomposición de  $\tilde{\Omega}$  definida por

$$W_2^h = \{\eta \in C^0(\tilde{\Omega}) : \eta|_\tau \in P_1 \text{ para todo } \tau \in \tilde{\mathcal{T}}_h\}$$

Y sea  $B_1^h$  el espacio vectorial de los polinomios continuos con respecto a una descomposición en la frontera  $\Gamma$  definida por

$$B_1^h := \{\eta \in C^0(\Gamma) : \eta|_s \in P_1 \text{ para todo } s \in S_{\Gamma, \bar{h}}\}.$$

Escribiremos  $W^h$  y  $B^h$  en lugar de  $W_1^h$  y  $B_1^h$  respectivamente.

### 2.2.3. Problema discreto

Usando los espacios de discretización  $W^h$ ,  $B^h$  y  $W_2^h$  tenemos las siguientes formulaciones de **(PV)** y **(PV1)**.

#### Problema $\mathbf{PV}^h$

Sea  $\mathcal{H}_1^h := [W^h]^2 \times B^h$  el espacio correspondiente a la formulación variacional **(PV)**. Entonces el problema discreto de la formulación del problema **(PV)** esta dado por:

Encontrar  $(u^h, \tilde{\mathbf{t}}^h) \in \mathcal{H}_1^h$  tal que

$$A(u^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; v^h, \tau^h) = F(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \tilde{\mathbf{t}}^{inc}; v^h, \tau^h) \quad \forall (v^h, \tau^h) \in \mathcal{H}_1^h \quad (\mathbf{PV}^h)$$

#### Problema $\mathbf{PV}_1^h$

Sea  $\mathcal{H}_2^h := [W^h]^2 \times [W_2^h]^2$  el espacio correspondiente a la formulación variacional **(PV1)**.

Entonces el problema discreto de la formulación del problema **(PV1)** esta dado por :

Encontrar  $(u^h, \tilde{u}^h) \in \mathcal{H}_2^h$  tal que

$$A_1(u^h, \tilde{u}^h; v^h, \tilde{v}^h) = F_1(v^h, \tilde{v}^h) \quad \forall (v^h, \tilde{v}^h) \in \mathcal{H}_2^h \quad (\mathbf{PV}_1^h)$$

### 2.2.4. Estimador de error apriori

Necesitamos obtener una estimación apriori del error para la solución de los problemas discretos **(PV<sup>h</sup>)** y **(PV<sub>1</sub><sup>h</sup>)** que muestre la unicidad y convergencia de el método de Galerkin, para tal fin aplicamos un teorema que se puede encontrar en McCamy and Stephan [17] o Bielak and MacCamy [2] para probar los siguientes resultados de convergencia.

**Teorema 2.4.** *Sea  $(u, \tilde{\mathbf{t}})$  una solución de **(PV)**. Entonces existe  $h_0 > 0$  y  $c > 0$  tal que para todo  $h < h_0$  el problema **(PV<sup>h</sup>)** tiene una solución única  $(u^h, \tilde{\mathbf{t}}^h) \in \mathcal{H}_1^h$  y*

$$\|(u, \tilde{\mathbf{t}}) - (u^h, \tilde{t}^h)\|_{\mathcal{H}_1} \leq c \left( \inf_{v^h \in [W^h(\Omega)]^2} \|u - v^h\|_1^2 + \inf_{t^h \in S^h} \|\tilde{\mathbf{t}} - \tau^h\|_{-\frac{1}{2}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Teorema 2.5.** Sea  $(u, \tilde{u})$  una solución de (PV1). Entonces existe  $h_0 > 0$  y  $c > 0$  talque para todo  $h < h_0$  el problema (PV<sub>1</sub><sup>h</sup>) tiene una solución única  $(u^h, \tilde{u}^h) \in \mathcal{H}_2^h$  y

$$\|(u, \tilde{u}) - (u^h, \tilde{u}^h)\|_{\mathcal{H}_2} \leq c \left( \inf_{v^h \in [W^h(\Omega)]^2} \|u - v^h\|_1^2 + \inf_{\tilde{v}^h \in [W_2^h(\tilde{\Omega})]^2} \|\tilde{u} - \tilde{v}^h\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

### 2.2.5. Tasa de Convergencia

Para la convergencia de los elementos finitos y de frontera necesitamos propiedades de aproximación de espacios de funciones continuas sobre  $\Omega$ ,  $\tilde{\Omega}$  y  $\Gamma$ , respectivamente. Asumimos que el espacio  $W^h$  y  $W_2^h$  satisfacen la siguiente propiedad de aproximación:

#### Propiedad de aproximación

Sea  $\mathcal{T}_h$ ,  $t \geq 1$  y  $\eta \in H^m(\tau)$ , entonces existe  $\eta^h \in W_{(\tau)}^h$  y una constante  $c > 0$  que no depende de  $h$  pero sobre  $m$ , talque

$$\|\eta - \eta^h\|_{H^m(\tau)} \leq ch^{t+1-m} |\eta|_{t+1, \tau} \quad \forall \eta \in H^{t+1}(\tau), \quad (2.35)$$

con  $0 \leq m \leq t + 1$ .

Para el espacio  $B^h$  podemos asumir la aproximación inversa. Para mas detalles ver por ejemplo Hsiao y Wendland [13] o Wendland [18].

#### Aproximación inversa

Para  $m \leq s \leq 2$ ,  $|m|, |s| \leq t$  entonces existe una constante  $c = c(m, s, t)$  para todo  $\eta^h \in B^h$

$$\|\eta^h\|_s \leq ch^{t-s} \|\eta^h\|_t \quad \forall \eta \in B^h. \quad (2.36)$$



## Capítulo 3

### El Kernel de los Operadores integrales

En este capítulo mostraremos el núcleo de los operadores integrales definidas en la Sección 1.1 provenientes de la ecuación de elastodinamica en términos de las funciones de Hankel y sus respectivas derivadas, los cuales involucran el calculo de gradientes y a su vez funciones definidas mediante series.

Para la ecuación elastodinamica (2.16) la solución fundamental de desplazamiento esta dada mediante

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{\tilde{\mu}} \gamma_{\tilde{k}_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I + \frac{1}{\rho \omega^2} \nabla \nabla (\gamma_{\tilde{k}_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_{\tilde{k}_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

donde  $\gamma_{\tilde{k}_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-i}{2} H_0^1(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |)$  es la solución fundamental de la ecuación de Helmholtz.  $H_0^1$  es la función de Hankel definida por  $H_0^1(\mathbf{x}) := J_0(\mathbf{x}) + iY_0(\mathbf{x})$  usando las funciones de Bessel de primer y segundo orden:

$$J_0(\mathbf{x}) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right)^{2v}$$

$$Y_0(\mathbf{x}) = \frac{2}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right) \right] J_0(\mathbf{x}) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \left(\frac{2}{\mathbf{x}}\right)^{-2r} - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \left(\frac{\mathbf{x}}{2}\right)^{2r} (2\phi(r))$$

donde  $e = 0,57721\dots$  y  $\phi$  es una función escalar definida mediante  $\phi(r) = \sum_{s=1}^r \frac{1}{s}$  y  $\phi(0) = 0$ .

Definiendo  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \gamma_{\tilde{k}_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_{\tilde{k}_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tenemos que

$$\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{\tilde{\mu}} \gamma_{\tilde{k}_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) I + \frac{1}{\rho \omega^2} \nabla \nabla \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \gamma_{\tilde{k}_w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_{\tilde{k}_s}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
&= \frac{-i}{2} H_0^1(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + \frac{i}{2} H_0^1(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) \\
&= \frac{-i}{2} \left[ J_0(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + i Y_0(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) \right] + \frac{i}{2} \left[ J_0(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + i Y_0(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[ J_0(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) - J_0(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) \right] + \frac{1}{2} \left[ Y_0(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) - Y_0(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) \right] \\
&= \frac{-i}{2} \left[ \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} | \mathbf{x} - \mathbf{y} |^{2v} - \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} | \mathbf{x} - \mathbf{y} |^{2v} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} | \mathbf{x} - \mathbf{y} | \right) \right] J_0(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + \right. \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \left( \frac{2}{\tilde{k}_w} \right)^{-2r} \left( \frac{1}{| \mathbf{x} - \mathbf{y} |} \right)^{-2r} + \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2r} | \mathbf{x} - \mathbf{y} |^{2r} (2\phi(r)) + \\
&\quad - \frac{2}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} | \mathbf{x} - \mathbf{y} | \right) \right] J_0(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \left( \frac{2}{\tilde{k}_s} \right)^{-2r} \left( \frac{1}{| \mathbf{x} - \mathbf{y} |} \right)^{-2r} + \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2r} | \mathbf{x} - \mathbf{y} |^{2r} (2\phi(r)) \right\} \\
&= \frac{-i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left[ \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} - \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} \right] | \mathbf{x} - \mathbf{y} |^{2v} + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} | \mathbf{x} - \mathbf{y} | \right) \right] J_0(\tilde{k}_w | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} | \mathbf{x} - \mathbf{y} | \right) \right] J_0(\tilde{k}_s | \mathbf{x} - \mathbf{y} |) + \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \left[ \left( \frac{2}{\tilde{k}_w} \right)^{-2r} - \left( \frac{2}{\tilde{k}_s} \right)^{-2r} \right] \left( \frac{1}{| \mathbf{x} - \mathbf{y} |} \right)^{-2r} + \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \left[ \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2r} - \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2r} \right] | \mathbf{x} - \mathbf{y} |^{2r} \phi(r),
\end{aligned}$$

tomando  $\tilde{k}_{2r} := \left[ \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2r} - \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2r} \right]$  se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{-i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2v} + \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] J_0(\tilde{k}_w |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + \\ &- \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] J_0(\tilde{k}_s |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \tilde{k}_{2r} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2r} + \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \tilde{k}_{2r} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2r} \phi(r)\end{aligned}$$

para determinar  $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  necesitamos calcular

$$\nabla_{\mathbf{x}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} \mathbf{B} & \partial_{x_1} \partial_{x_2} \mathbf{B} \\ \partial_{x_2} \partial_{x_1} \mathbf{B} & \partial_{x_2} \partial_{x_2} \mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad ,$$

$$\partial_{x_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2r} = \frac{2r(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} \quad i = 1, 2. \quad ,$$

$$\partial_{x_i} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \quad i = 1, 2. \quad ,$$

y además para  $i, j = 1, 2$  y  $i = j$  ó  $i \neq j$  se tiene que

$$\partial_{x_j} \partial_{x_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2r} = \frac{(4r^2 - 4r)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+4}} + \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}}$$

$$\partial_{x_j} \partial_{x_i} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \frac{-2(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} + \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}.$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de kronecher definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

Usando las anteriores igualdades tenemos que  $\partial_{x_i} \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  para  $i = 1, 2$  esta dada por:

$$\begin{aligned}
\partial x_i \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{-i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \frac{2v(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{1}{\pi} \left( \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2v} + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} \frac{2v(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \\
&- \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} \frac{2v(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \\
&- \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \tilde{k}_{2r} \frac{2r(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \tilde{k}_{2r} \frac{2r(x_i - y_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} \phi(r)
\end{aligned}$$

Ahora hallemos  $\partial x_j \partial x_i \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  para  $i, j = 1, 2$  y  $i = j$  ó  $i \neq j$  entonces:

$$\begin{aligned}
\partial x_j \partial x_i \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{-i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} - \frac{2(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2v} + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left( \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \frac{2v(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left( \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} \frac{2v(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \\
&+ \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \cdot \\
&\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
&- \frac{1}{\pi} \left( \frac{x_i - y_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} \frac{2v(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \\
&- \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \cdot \\
&\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
&- \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2 - 4r)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) + \\
&- \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2 - 4r)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) \phi(r) \\
&= \frac{-i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} - \frac{2(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2v} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \frac{4v(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} + \\
& + \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \cdot \\
& \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \cdot \\
& \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2 - 4r)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2 - 4r)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) \phi(r)
\end{aligned}$$

Finalmente podemos escribir la solución fundamental para la ecuación elastodinámica dada en (3.1) para  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$  por:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \frac{i}{2\tilde{\mu}} \left\{ \left[ 1 + \frac{2i}{\pi} \left( e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right)^{2v} + \right. \\
& - \frac{i}{\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \left( \frac{2}{\tilde{k}_w |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \right)^{-2r} + \\
& - \frac{i}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right)^{2r} (2\phi(r)) \Big\} I_{ij} + \\
& + \frac{1}{\rho w^2} \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2 - 4v)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} - \frac{2(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2v} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \frac{4v(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2v+4}} + \\
& \left. + \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \right) \right] \right\} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} \right)^{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2-4v)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_s}{2} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \right) \right] \cdot \\
& \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_s}{2} \right)^{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2-4v)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2-4r)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2-4r)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) \phi(r) \} \\
& = \frac{i}{2\tilde{\mu}} \left\{ \left[ 1 + \frac{2i}{\pi} \left( e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \right) \right) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \right)^{2v} + \right. \\
& - \frac{i}{\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \left( \frac{2}{\tilde{k}_w |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right)^{-2r} + \\
& - \frac{i}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \left( \frac{\tilde{k}_w}{2} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \right)^{2r} (2\phi(r)) \} I_{ij} + \\
& + \frac{1}{\rho w^2} \left\{ \frac{-i}{2} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2-4v)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \left( \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} - \frac{2(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^4} \right) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{2v} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \frac{4v(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+4}} + \\
& + \frac{1}{\pi} \left[ e + \log\left(\frac{\tilde{k}_w}{\tilde{k}_s} \right) \right] \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!v!} \tilde{k}_{2v} \left( \frac{2v\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+2}} + \frac{(4v^2-4v)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2v+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{-1} \frac{(-r-1)!}{r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2-4r)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) + \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!r!} \tilde{k}_{2r} \left( \frac{2r\delta_{ij}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+2}} + \frac{(4r^2-4r)(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2r+4}} \right) \phi(r) \}
\end{aligned}$$

**Observación 3.0.1.** El nucleo  $\tilde{\mathbf{G}}$  se utiliza para la implementación del operador de capa simple  $\tilde{V}$  (ver Sección 1.1). Para la implementación del operador de capa doble y su adjunto debemos calcular la tracción  $\sigma(\tilde{\mathbf{G}})\mathbf{n}$  pero estos calculos resultan tediosos.

## Capítulo 4

### Estimador de error a posteriori - tipo residual

El propósito de este capítulo es presentar un estimador de error aposteriori para la formulación variacional **(PV)** y **(PV1)** el cual consiste en una cota superior del error que no depende la solución exacta del problema. Para ello, tomaremos las ideas de C. Domínguez [9]. El estimador de error residual se formula en la norma  $L^2$  utilizando técnicas estándar para métodos de FEM, véase, por ejemplo Johnson [15] o Braess [3] y técnicas de FEM/BEM métodos de acoplamiento, véase, por ejemplo Carstensen [4, 6, 5]. A continuación se presentaran algunos resultados que son útiles para la demostración de nuestro estimador de error. Aplicando las propiedades de aproximación (2.35) y aproximación inversa (2.36) a un elemento  $\tau \in \mathcal{T}_h$  y  $s \in S_{\Gamma, \bar{h}}$  obtenemos:

**Lema 4.1.** *Existen constantes positivas  $c_1, c_2$  independientes de  $\tau \in \mathcal{T}_h$  y  $h$ , de tal manera que para cada  $\eta \in H^1(\tau)$  existe  $\eta^h \in W^h(\tau)$  tal que*

$$\|\eta - \eta^h\|_{0,\tau} \leq c_1 h |\eta|_{1,\tau}, \quad (4.1)$$

y

$$\|\eta - \eta^h\|_{0,\partial\tau} \leq c_2 h^{1/2} |\eta|_{1,\tau}. \quad (4.2)$$

También existe una constante  $c_3 > 0$  independiente de  $s \in S_{\Gamma, \bar{h}}$  tal que

$$\|\eta^h\|_0 \leq c_3 h^{\frac{1}{2}} \|\eta^h\|_{\frac{1}{2}} \quad \forall \eta \in B^h. \quad (4.3)$$

**Observación 4.0.2.** De la sección (2.1.3) sabemos que existe una solución única  $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \in \mathcal{H}_1$  de el problema variacional **(PV)** dado por

$$A(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}; \mathbf{v}, \tau) = F(\mathbf{v}, \tau) \quad \text{para todo } (\mathbf{v}, \tau) \in \mathcal{H}_1$$

Debido a que la forma sesquilineal  $A$  es auto-adjunto excepto en los términos que contiene el operador  $K$ , cuyo adjunto es  $K'$ , podemos aplicar la solución asociada a la forma bilineal  $A$  para obtener la existencia y unicidad del siguiente problema adjunto

$$\mathcal{A}^*(\mathbf{v}, \tau; \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) := A(\overline{\mathbf{v}}, \overline{\tau}; \overline{\mathbf{u}}, \overline{\tilde{\mathbf{t}}}) = F(\mathbf{v}, \tau) \quad \text{para todo } (\mathbf{v}, \tau) \in \mathcal{H}_1$$

Sea  $\mathcal{H}'_1 := H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ . Además tenemos que los operadores son continuos e invertibles  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}'_1$  y  $\mathcal{A}^* : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}'_1$  tal que

$$A(\eta, \zeta) = \langle A\eta, \zeta \rangle_{\mathcal{H}'_1}, \quad \mathcal{A}^*(\zeta, \eta) = \langle \mathcal{A}^*\zeta, \eta \rangle_{\mathcal{H}'_1},$$

para  $(\eta, \zeta) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1$ .

**Notación.** Recordemos que  $\mathcal{T}_h$  es una descomposición regular de  $\Omega$  o  $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ , en triángulos no traslapados  $\tau$  de diámetro  $h_\tau$ , donde  $h := \max_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau$  y  $S_{\Gamma, \bar{h}}$  el conjunto de lados  $s$  o elementos de frontera de la triangulación de longitud  $\bar{h}_s$ , donde  $\bar{h} := \max_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \bar{h}_s$

**Definición 4.2.** Sea  $S_i$  el conjunto de lados de  $\mathcal{T}_h$  que no están en la frontera de la triangulación. Ahora para  $\tau \in \mathcal{T}_h$ , definiremos los lados interiores de  $\tau$  por  $S_{\tau, i} = \{s_{\tau, i}\}$  y por  $S_{\tau, \Gamma}$  el conjunto de lados o elementos de frontera de la triangulación. Tenga en cuenta que el conjunto de lados de  $\tau$  está dada por  $S_\tau = S_{\tau, i} \cup S_{\tau, \Gamma}$

**Teorema 4.3.** Sea  $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}) \in \mathcal{H}_1$  la solución del problema **(PV)** y  $(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h) \in \mathcal{H}_1^h$  la solución del problema discreto **(PV<sup>h</sup>)**. Entonces existe una constante  $C > 0$  independiente de  $h$  tal que

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}^h - \tilde{\mathbf{t}}\|_{\mathcal{H}_1} \leq C(R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

donde

$$R_1^h := \sum_{\tau \in \mathcal{T}_h} h_\tau^2 \|\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h) + \rho w^2 \mathbf{u}^h - \mathbf{f}\|_{0, \tau}^2$$

$$R_2^h := \sum_{s_i \in S_i} h_{s_i} \|\llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0, S_i}^2$$

$$\begin{aligned}
R_3^h &:= \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} - \tilde{\mathbf{t}}^{inc} + (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h + \tilde{W} \mathbf{u}^h\|_{0,S}^2 \\
R_4^h &:= \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|(\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} - \mathbf{u}^h + \tilde{K} \mathbf{u}^h - \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h\|_{0,S}^2
\end{aligned}$$

Demostración:

Sabemos que el problema adjunto  $\mathcal{A}^* \delta = \eta$  tiene única solución para cada  $\eta \in \mathcal{H}_1'$  además que  $(\mathcal{A}^*)^{-1} = \mathcal{H}_1' \longrightarrow \mathcal{H}_1$  es continua, es decir,

$$\|\delta\|_{\mathcal{H}_1} \leq c \|\eta\|_{\mathcal{H}_1'} \quad \forall (\delta, \eta) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1', \quad (4.5)$$

ya que  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_1'$  forman un par dual con respecto al producto vectorial:  $\mathcal{L}^2 := [L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Gamma)]^2$ . Sea  $e := (\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}^h - \tilde{\mathbf{t}})$  entonces

$$\|e\|_{\mathcal{H}_1} \leq \sup_{\|\eta\|_{\mathcal{H}_1'} \leq 1} |(e, \eta)_{\mathcal{L}^2}| = \sup_{\|\mathcal{A}^* \delta\|_{\mathcal{H}_1'} \leq 1} |(e, \mathcal{A}^* \delta)_{\mathcal{L}^2}| = \sup_{\|\mathcal{A}^* \delta\|_{\mathcal{H}_1'} \leq 1} |(\mathcal{A}e, \delta)_{\mathcal{L}^2}|,$$

entonces

$$\|e\|_{\mathcal{H}_1} \leq \sup_{\|\mathcal{A}^* \delta\|_{\mathcal{H}_1'} \leq 1} |(\mathcal{A}e, \delta)_{\mathcal{L}^2}|. \quad (4.6)$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}e, \delta) &= A(e, \delta) = A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; \delta) - A(u, \tilde{\mathbf{t}}; \delta) \\
&= A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; \delta) - F(\delta).
\end{aligned}$$

Para  $l \in \mathcal{H}_1^h$  se tiene que  $A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; l) - F(l) = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
A(e, \delta) &= A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; \delta) - F(\delta) + F(l) - A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; l) \\
&= F(l - \delta) - A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; l - \delta).
\end{aligned}$$

Tomando  $l$  como la proyección en  $\mathcal{L}^2$  sobre  $\mathcal{H}_1^h$  y  $\eta := (\eta_{\mathbf{v}}, \eta_{\psi}) = l - \delta \in \mathcal{H}_1$ , donde  $\eta_{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^2$  y  $\eta_{\psi} \in [L^2(\Gamma)]^2$ . Obtenemos

$$A(e, \delta) = F(\eta) - A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; \eta). \quad (4.7)$$

Ahora analicemos la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$  en 2.27 para cada triángulo  $\tau \in \mathcal{T}_h$ .

Integrando por partes en cada triángulo  $\tau \in \mathcal{T}_h$  y sobre la frontera de cada triángulo  $\partial\tau$  en el interior de cada lado  $s_{\tau,i} \in S_{\tau,int}$  y cada lado exterior  $s_{\tau,\Gamma} \in S_{\tau,\Gamma}$  se tiene

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}})_{\tau} &= (\sigma(\mathbf{u}^h) : \nabla \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} = -(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h), \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} + \int_{\partial\tau} (\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \eta_{\mathbf{v}} ds \\ &= -(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h), \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} \\ &\quad + \sum_{s_{\tau,i} \in S_{\tau,int}} \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_{\tau,i}} + \sum_{s_{\tau,\Gamma} \in S_{\tau,\Gamma}} \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_{\tau,\Gamma}} \end{aligned}$$

Por otra parte de (4.7) tenemos

$$\begin{aligned} A(e, \delta) &= F(\eta) - A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{t}}^h; \eta) \\ &= \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} [(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h), \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} + \rho w^2(\mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} - (f, \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau}] \\ &\quad - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_i} - \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 + \langle \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 \\ &\quad + \langle \eta_{\psi}, (\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} \rangle_0 - \langle (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 - \langle W \mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 \\ &\quad - \langle \eta_{\psi}, \mathbf{u}^h \rangle_0 + \langle \eta_{\psi}, \tilde{K} \mathbf{u}^h \rangle_0 + \langle \eta_{\psi}, \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h \rangle_0 \\ &= \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} (r_1^h, \eta_{\mathbf{v}})_{\tau} + (r_2^h, \eta_{\mathbf{v}}) + (\eta_{\psi}, r_3^h) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $\llbracket \cdot \rrbracket$  denota el salto a través de una cara interior,  $r_1^h := \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h) + \rho w^2 \mathbf{u}^h - \mathbf{f}$  define el residual en los elementos interiores y los residuales en la frontera estan dados por:

$$\begin{aligned} (r_2^h, \eta_{\mathbf{v}}) &:= - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_i} - \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 + \langle \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 \\ &\quad - \langle (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 - \langle W \mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_0 \\ &= - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_i} + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \left( - \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s} + \langle \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s} \right. \\ &\quad \left. - \langle (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s} - \langle W \mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s} \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(\eta_\psi, r_3^h) &:= \langle \eta_\psi, (\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} \rangle_0 - \langle \eta_\psi, \mathbf{u}^h \rangle_0 + \langle \eta_\psi, \tilde{K} \mathbf{u}^h \rangle_0 + \langle \eta_\psi, \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h \rangle_0 \\
&= \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \left( \langle \eta_\psi, (\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} \rangle_{0,s} - \langle \eta_\psi, \mathbf{u}^h \rangle_{0,s} + \langle \eta_\psi, \tilde{K} \mathbf{u}^h \rangle_{0,s} + \langle \eta_\psi, \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h \rangle_{0,s} \right).
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, Lema 4.1 y la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned}
|A(e, \delta)| &= \left| \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} (r_1^h, \eta_\mathbf{v})_\tau + (r_2^h, \eta_\mathbf{v}) + (\eta_\psi, r_3^h) \right| \\
&\leq \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} |(r_1^h, \eta_\mathbf{v})_\tau| + \left| \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_\mathbf{v} \rangle_{0,s_i} \right| \\
&+ \left| \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} -\langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_\mathbf{v} \rangle_{0,s} + \langle \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc}, \eta_\mathbf{v} \rangle_{0,s} - \langle (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h, \eta_\mathbf{v} \rangle_{0,s} - \langle W \mathbf{u}^h, \eta_\mathbf{v} \rangle_{0,s} \right| \\
&+ \left| \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \langle \eta_\psi, (\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} \rangle_{0,s} - \langle \eta_\psi, \mathbf{u}^h \rangle_{0,s} + \langle \eta_\psi, \tilde{K} \mathbf{u}^h \rangle_{0,s} + \langle \eta_\psi, \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h \rangle_{0,s} \right| \\
&\leq \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|r_1^h\|_{o,\tau} \|\eta_\mathbf{v}\|_{o,\tau} + \sum_{s_i \in S_i} \|\llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,s_i} \|\eta_\mathbf{v}\|_{0,s_i} \\
&+ \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|-\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} + \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc} - (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h - W \mathbf{u}^h\|_{0,s} \|\eta_\mathbf{v}\|_{0,s} \\
&+ \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\eta_\psi\|_{0,s} \|(\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} - \mathbf{u}^h + \tilde{K} \mathbf{u}^h + \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h\|_{0,s} \\
&\leq c_1 \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} h_\tau \|r_1^h\|_{o,\tau} |\delta_\mathbf{v}|_{1,\tau} + c_2 \sum_{s_i \in S_i} \|\llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,s_i} h_{s_i}^{\frac{1}{2}} |\delta_\mathbf{v}|_{1,s_i} \\
&+ c_2 \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|-\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} + \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc} - (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h - W \mathbf{u}^h\|_{0,s} h_s^{\frac{1}{2}} |\delta_\mathbf{v}|_{1,s} \\
&+ c_3 \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s^{\frac{1}{2}} \|\eta_\psi\|_{\frac{1}{2},s} \|(\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} - \mathbf{u}^h + \tilde{K} \mathbf{u}^h + \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h\|_{0,s} \\
&\leq \max\{c_1, c_2, c_3, \} \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} h_\tau^2 \|r_1^h\|_{o,\tau}^2 + \sum_{s_i \in S_i} h_{s_i} \|\llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,s_i}^2 \right. \\
&+ \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|-\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} + \tilde{W} \tilde{\mathbf{u}}^{inc} + \tilde{\mathbf{t}}^{inc} - (\tilde{K}' - \frac{I}{2}) \tilde{\mathbf{t}}^h - W \mathbf{u}^h\|_{0,s}^2 \\
&+ \left. \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|(\frac{I}{2} - \tilde{K}) \tilde{\mathbf{u}}^{inc} - \mathbf{u}^h + \tilde{K} \mathbf{u}^h + \tilde{V} \tilde{\mathbf{t}}^h\|_{0,s}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\times \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} |\delta_{\mathbf{v}}|_{1,\tau}^2 + \sum_{s \in S_i} |\delta_{\mathbf{v}}|_{1,s_i}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} |\delta_{\mathbf{v}}|_{1,s}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} \|\eta_{\psi}\|_{\frac{1}{2},s}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces

$$\begin{aligned} |A(e, \delta)| &\leq \max\{c_1, c_2, c_3\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\delta_{\mathbf{v}}\|_{1,\tau}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} \|\eta_{\psi}\|_{\frac{1}{2},s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\{c_1, c_2, c_3\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\delta_{\mathbf{v}}\|_{1,\tau}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} \|\delta_{\psi}\|_{-\frac{1}{2}}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} \|\eta_{\psi}\|_{\frac{1}{2},s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\{c_1, c_2, c_3\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} (\|\delta\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} \|\eta_{\psi}\|_{\frac{1}{2},s}^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

usando (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} |A(e, \delta)| &\leq \max\{c_1, c_2, c_3\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} (\bar{c} \|\eta\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma,\bar{h}}} \|\eta_{\psi}\|_{\frac{1}{2},s}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\{c_1, c_2, c_3\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} c \|\eta\|_{\mathcal{H}_1'} \end{aligned}$$

Finalmente, a partir de (4.6), usando (4.7) y la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{t}}^h - \tilde{\mathbf{t}}\|_{\mathcal{H}_1} \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h)^{\frac{1}{2}} \quad \square$$

Ahora presentaremos el error residual para formulaci3n variacional (**PV1**) o acople FEM/FEM teniendo en cuenta la existencia y unicidad del problema adjunto debido a que la forma sesquilineal  $A_1$  es auto-adjunto.

**Teorema 4.4.** *Sea  $(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) \in \mathcal{H}_2$  la soluci3n del problema (**PV1**) y  $(\mathbf{u}^h, \mathbf{u}^h) \in \mathcal{H}_2^h$  la soluci3n del problema discreto (**PV1**<sup>h</sup>). Entonces existe una constante  $C > 0$  independiente de  $h$  tal que*



$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_2} \leq C(R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} \quad (4.9)$$

donde

$$\begin{aligned} R_1^h &:= \sum_{\tau \in T_h} h_\tau^2 \|\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} + \rho w^2 \mathbf{u}^h - \mathbf{f}\|_{0,T}^2 \\ R_2^h &:= \sum_{s_i \in S_i} h_{s_i} \|\llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,S_i}^2 \\ R_3^h &:= \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n} - \mathbf{u}^h + \tilde{\mathbf{u}}^h + \tilde{\mathbf{u}}^{inc}\|_{0,S}^2 \\ R_4^h &:= \sum_{\tau \in T_h} h_\tau \|\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \tilde{\rho} w^2 \tilde{\mathbf{u}}^h\|_{0,T}^2 \\ R_5^h &:= \sum_{s_i \in S_i} h_{s_i} \|\llbracket \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0,S_i}^2 \\ R_6^h &:= \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}\|_{0,S}^2 \end{aligned}$$

Demostración:

Sabemos que el problema adjunto  $\mathcal{A}_1^* \delta = \eta$  tiene única solución para cada  $\eta \in \mathcal{H}_2'$  además que  $(\mathcal{A}_1^*)^{-1} = \mathcal{H}_2' \longrightarrow \mathcal{H}_2$  es continua, es decir,

$$\|\delta\|_{\mathcal{H}_2} \leq c \|\eta\|_{\mathcal{H}_2'} \quad \forall (\delta, \eta) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2', \quad (4.10)$$

ya que  $\mathcal{H}_2$  y  $\mathcal{H}_2'$  forman un par dual con respecto al producto vectorial:  $\mathcal{L}^2 := [L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Gamma)]^2$ . Sea  $e := (\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}^h - \tilde{\mathbf{u}})$  entonces

$$\|e\|_{\mathcal{H}_2} \leq \sup_{\|\eta\|_{\mathcal{H}_2'} \leq 1} |(e, \eta)_{\mathcal{L}^2}| = \sup_{\|\mathcal{A}_1^* \delta\|_{\mathcal{H}_2'} \leq 1} |(e, \mathcal{A}_1^* \delta)_{\mathcal{L}^2}| = \sup_{\|\mathcal{A}_1^* \delta\|_{\mathcal{H}_2'} \leq 1} |(\mathcal{A}_1 e, \delta)_{\mathcal{L}^2}|,$$

entonces

$$\|e\|_{\mathcal{H}_2} \leq \sup_{\|\mathcal{A}_1^* \delta\|_{\mathcal{H}_2'} \leq 1} |(\mathcal{A}_1 e, \delta)_{\mathcal{L}^2}|. \quad (4.11)$$

Además tenemos que

$$(\mathcal{A}_1 e, \delta) = A_1(e, \delta) = A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; \delta) - A_1(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}; \delta)$$

$$= A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; \delta) - F_1(\delta).$$

Para  $l \in \mathcal{H}_1^h$  se tiene que  $A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; l) - F_1(l) = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} A_1(e, \delta) &= A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; \delta) - F_1(\delta) + F_1(l) - A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; l) \\ &= F_1(l - \delta) - A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; l - \delta). \end{aligned}$$

Tomando  $l$  como la proyección en  $\mathcal{L}^2$  sobre  $\mathcal{H}_1^h$  y  $\eta := (\eta_{\mathbf{v}}, \eta_{\psi}) = l - \delta \in \mathcal{H}_1$ , donde  $\eta_{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^2$  y  $\eta_{\psi} \in [L^2(\Gamma)]^2$ . Obtenemos

$$A_1(e, \delta) = F_1(\eta) - A_1(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; \eta). \quad (4.12)$$

Ahora analicemos las formas bilineales  $a(\cdot, \cdot)$  de  $A_1$  para cada triángulo  $\tau \in \mathcal{T}_h$ .

Integrando por partes en cada triángulo  $\tau \in \mathcal{T}_h$  y sobre la frontera de cada triángulo  $\partial\tau$  en el interior de cada lado  $s_{\tau,i} \in S_{\tau,int}$  y cada lado exterior  $s_{\tau,\Gamma} \in S_{\tau,\Gamma}$  se tiene

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}})_{\tau} &= (\sigma(\mathbf{u}^h) : \nabla \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} = -(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h), \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} + \int_{\partial\tau} (\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}) \cdot \eta_{\mathbf{v}} ds \\ &= -(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h), \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} \\ &\quad + \sum_{s_{\tau,i} \in S_{\tau,int}} \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_{\tau,i}} + \sum_{s_{\tau,\Gamma} \in S_{\tau,\Gamma}} \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0,s_{\tau,\Gamma}} \end{aligned}$$

similarmente se tiene que

$$\begin{aligned} a(\tilde{\mathbf{u}}^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})_{\tau} &= -(\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h), \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})_{0,\tau} \\ &\quad + \sum_{s_{\tau,i} \in S_{\tau,int}} \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0,s_{\tau,i}} + \sum_{s_{\tau,\Gamma} \in S_{\tau,\Gamma} \cup \Gamma_a} \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0,s_{\tau,\Gamma}} \end{aligned}$$

Reemplazando las anteriores igualdades en (4.12) tenemos

$$\begin{aligned} A(e, \delta) &= F(\eta) - A(\mathbf{u}^h, \tilde{\mathbf{u}}^h; \eta) \\ &= \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} [(\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h), \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} + \rho w^2 (\mathbf{u}^h, \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau} - (f, \eta_{\mathbf{v}})_{0,\tau}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, s_i} - \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, \Gamma} \\
& + \langle -\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n} - \mathbf{u}^h + \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, \Gamma} \\
& + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} [(\operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h), \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})_{0, \tau} + \tilde{\rho} w^2 (\tilde{\mathbf{u}}^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})_{0, \tau}] \\
& - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, s_i} - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, \Gamma} - \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, \Gamma_a} \\
& + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, \Gamma} + \langle \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, \Gamma_a} \\
& = \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} (r_1^h, \eta_{\mathbf{v}})_{\tau} + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} (r_2^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})_{\tau} + (r_3^h, \eta_{\mathbf{v}}) + (r_4^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})
\end{aligned}$$

donde  $\llbracket \cdot \rrbracket$  denota el salto a través de una cara interior,  $r_1^h := \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}^h) + \rho w^2 \mathbf{u}^h - \mathbf{f}$  y  $r_2^h := \operatorname{div} \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) + \tilde{\rho} w^2 \tilde{\mathbf{u}}^h$  define los residuales en los elementos interiores y los residuales en la frontera estan dados por:

$$\begin{aligned}
(r_3^h, \eta_{\mathbf{v}}) &:= - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, s_i} - \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, \Gamma} + \langle -\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n} - \mathbf{u}^h + \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, \Gamma} \\
&= - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, s_i} \\
&+ \sum_{s \in S_{\Gamma, \tilde{h}}} \left( \langle -\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, s} + \langle -\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n} - \mathbf{u}^h + \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^{inc}, \eta_{\mathbf{v}} \rangle_{0, s} \right),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(r_4^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}}) &:= - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, s_i} + \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, \Gamma} + \langle -\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, \Gamma} \\
&= - \sum_{s_i \in S_i} \langle \llbracket \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} \rrbracket, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, s_i} + \sum_{s \in S_{\Gamma, \tilde{h}}} \left( \langle \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n} - \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}} \rangle_{0, s} \right),
\end{aligned}$$

Similarmente a la demostración del teorema anterior usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, Lema 4.1 y la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\begin{aligned}
|A(e, \delta)| &= \left| \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} (r_1^h, \eta_{\mathbf{v}})_{\tau} + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} (r_2^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}})_{\tau} + (r_3^h, \eta_{\mathbf{v}}) + (r_4^h, \eta_{\tilde{\mathbf{v}}}) \right| \\
&\leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} h_{\tau}^2 \|r_1^h\|_{0, \tau}^2 + \sum_{s_i \in S_i} h_{s_i} \|\llbracket \sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} \rrbracket\|_{0, s_i}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n} - \mathbf{u}^h + \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}^{inc}\|_{0,s}^2 + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} h_\tau \|r_2^h\|_{o,\tau}^2 \\
& + \sum_{s_i \in S_i} h_{s_i} \|\sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n}\|_{0,s_i}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} h_s \|\sigma(\mathbf{u}^h) \mathbf{n} - \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^h) \mathbf{n} + \sigma(\tilde{\mathbf{u}}^{inc}) \mathbf{n}\|_{0,s}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} |\delta_{\mathbf{v}}|_{1,\tau}^2 + \sum_{s \in S_i} |\delta_{\mathbf{v}}|_{1,s_i}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} |\delta_{\mathbf{v}}|_{1,s}^2 + \right. \\
& \left. + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_i} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
|A(e, \delta)| & \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\delta_{\mathbf{v}}\|_{1,\tau}^2 + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_i} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left( \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\delta_{\mathbf{v}}\|_{1,\tau}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\delta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{-\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_i} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} \\
& \times (\|\delta\|_{\mathcal{H}_2}^2 + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_i} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

usando (4.10) tenemos

$$\begin{aligned}
|A(e, \delta)| & \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} \\
& \times (\bar{c} \|\eta\|_{\mathcal{H}'_2}^2 + \sum_{\tau \in \mathbf{T}_h} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_i} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2 + \sum_{s \in S_{\Gamma, \bar{h}}} \|\eta_{\tilde{\mathbf{v}}}\|_{\frac{1}{2},s}^2)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} c \|\eta\|_{\mathcal{H}'_2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de (4.11), usando (4.12) y la desigualdad anterior, obtenemos

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_2} \leq \max\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c\} (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}} \quad \square$$

**Nota.** Con el estimador de error residual a posteriori se puede calcular indicadores locales de error sobre cada triángulo y refinar aquellos donde el indicador es mayor. Con este procedimiento, es posible mejorar la convergencia del método y a su vez el tiempo de cálculo podría disminuir si se aplica una estrategia adaptativa.



## Capítulo 5

### Experimentos Numéricos

En este capítulo se presentaran los resultados numéricos para el problema de interacción fluido-estructura presentado en la sección (2.1.2), se calcula numéricamente el estimador de error tipo residual presentado en el Teorema 4.4 de la formulación variacional (**PV1**). Inicialmente mostraremos experimentos numéricos usando el método de elementos finitos para los problemas con condiciones de frontera tipo Neumann en el solido y en el fluido, tratados separadamente. Resolveremos el siguiente problema:

Encontrar el desplazamiento  $\mathbf{u}$  en  $\Omega$  que satisface:

$$\operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + w^2 \rho \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \text{en } \Omega \quad (5.1)$$

$$\sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{g}, \quad \text{en } \Gamma. \quad (5.2)$$

donde

$$\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} w^2(2\mu + \lambda) \cos(wx) - \rho w^2 \cos(wx) - \lambda - \mu + iw^2[\mu \operatorname{sen}(wy) + \sin(wy)] \\ \rho w^2 xy \end{pmatrix}$$

$\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé.

En este caso, la solucion de 5.1-5.2 viene dada por  $\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(wx) + i \operatorname{sen}(wy) \\ xy \end{pmatrix}$ .

La formulacion variacional asociada al problema está dada por:

Encontrar  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} dx - \rho w^2 a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}} dx \quad \text{para cualquier } \mathbf{v} \in [W^h]^2 \quad (5.3)$$

que se obtiene multiplicando la ecuación (5.1) por una función test  $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$  e integrado por partes y luego aplicando la condición de frontera.

Estamos interesados en calcular los siguientes errores

$$e_0 := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_0$$

$$e_1 := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_1$$

donde  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$  corresponden a la norma en  $L^2$  y la norma de la energía inducida por la forma bilineal  $a(\cdot, \cdot)$ , y en la tasa de convergencia experimental dada por

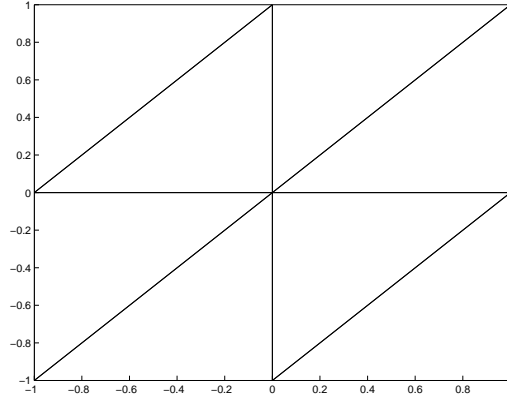
$$\theta_N = \frac{\log(\frac{e_j}{e_j+1})}{\log(\frac{N_j}{N_j+1})}$$

donde  $N_j$  es el grados de libertad del sistema discreto.



## 5.1. Problema interno usando FEM

En este experimento consideremos  $\Omega := [-1, 1]^2$ , en este caso  $\lambda = E\nu/[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$  y  $\mu = E/[2(1 + \nu)]$  donde el coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  y el módulo de Young  $E = 200GPa$ . En la figura (5.1) mostramos una discretización del dominio  $\Omega$



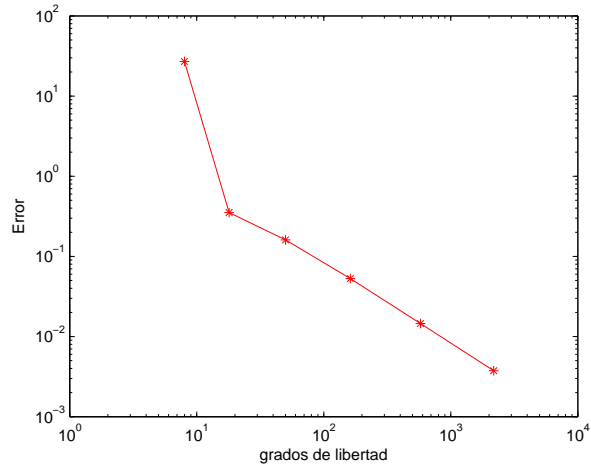
**Figura 5.1** Discretización del dominio  $\Omega := [-1, 1]^2$  (8 dof).

La Tabla 5.1 muestra las normas de la solución aproximada junto con los errores y la tasa experimental de convergencia. En las columnas  $\theta_0$  y  $\theta_1$  se observa que el orden de convergencia en la norma  $L^2$  y en la norma de energía es de  $O(h^1)$ . Recordemos que el orden de convergencia depende de  $h^{t-m}$  donde  $t \geq 1$  con  $0 < m \leq t + 1$ ; al estar trabajando con polinomios lineales,  $P_{t-1}$ ; se tiene que  $t - 1 = 1$ ; tenemos que  $t = 2$  y  $m = 1$ , así, el orden de convergencia en la norma  $\|\cdot\|_1$  es del orden  $O(h^1)$ .

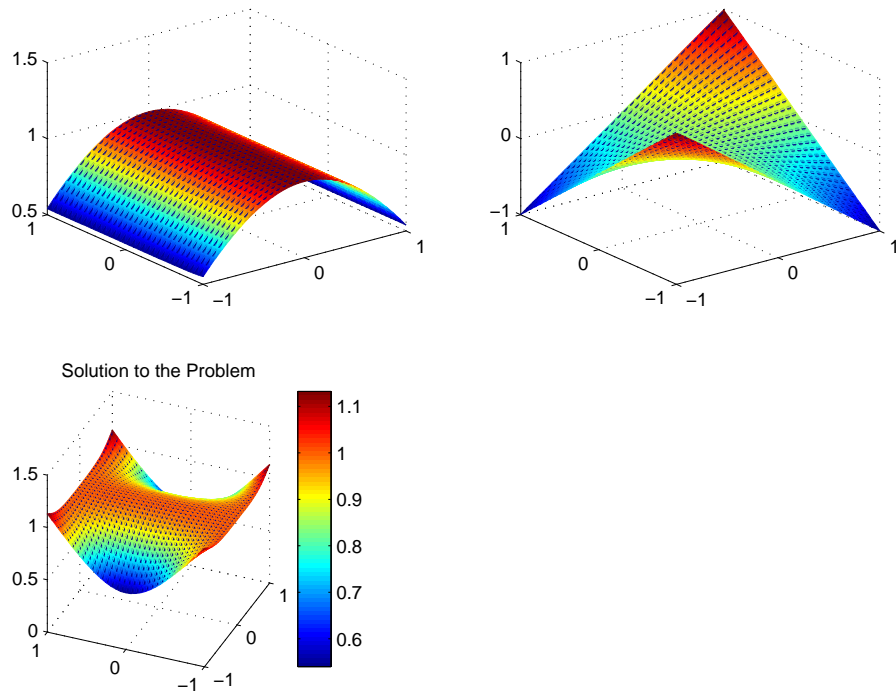
La Figura 5.2 muestra la gráfica de error  $e_1$  y la Figura 5.3 muestra el campo de desplazamiento  $\mathbf{u}(x, y)$ .

$N$	$\ \mathbf{u}\ _1$	$\ \mathbf{u}\ _0$	$e_0$	$\theta_0$	$e_1$	$\theta_1$
8	5.973214e+05	2.649907	2.705058e+01	0	9.372642e+05	0
18	7.403440e+05	2.051149	3.520002e-01	5.3541	3.871635e+05	1.0903
50	8.030373e+05	2.072022	1.607492e-01	0.7672	1.400777e+05	0.9951
162	8.270234e+05	2.096059	5.285095e-02	0.9462	4.388739e+04	0.9872
578	8.345096e+05	2.104874	1.453690e-02	1.0148	1.271483e+04	0.9740
2178	8.365455e+05	2.107344	3.742039e-03	1.0230	3.552814e+03	0.9611
8450	8.370689e+05	2.108025	9.449032e-04	1.0152	9.718674e+02	0.9561

**Tabla 5.1** Problema interno: normas  $\|\cdot\|_0$  y  $\|\cdot\|_1$ , errores  $e_0$  y  $e_1$ ; y sus respectivas tasas de convergencia exp.



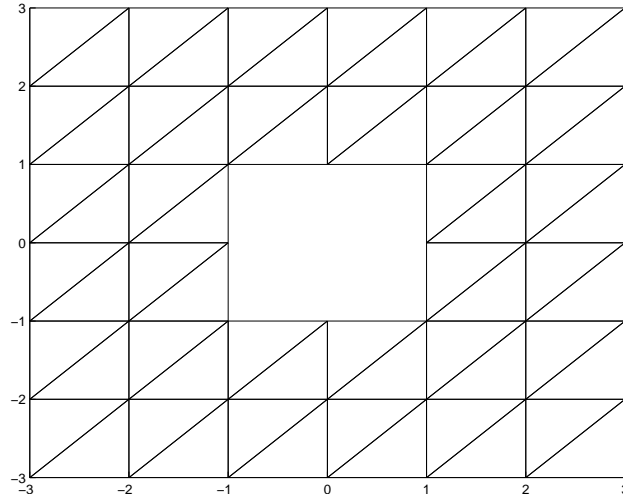
**Figura 5.2** Problema interno: Gráfica de grados de libertad vs. error  $e_1$



**Figura 5.3** Problema interno: Campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  para  $N = 2178$ . Arriba-izquierda: parte real desplazamiento eje  $x$ ; arriba-derecha: parte real desplazamiento eje  $y$ ; abajo: norma del desplazamiento

## 5.2. Problema Externo usando FEM

En este experimento consideremos  $\Omega := [-3, 3]^2 / (-1, 1)^2$ , en este caso  $\lambda = \rho c^2 + \frac{2}{3} i \omega \mu_f$  y  $\mu = -i \omega \mu_f$  donde la densidad  $\rho = 1020 \text{Kg/m}^3$ , la velocidad del sonido  $c = 1500 \text{m/s}$  y el coeficiente de viscosidad  $\mu_f = 0,001002$ . En la figura (5.4) mostramos una discretización del dominio problema externo.

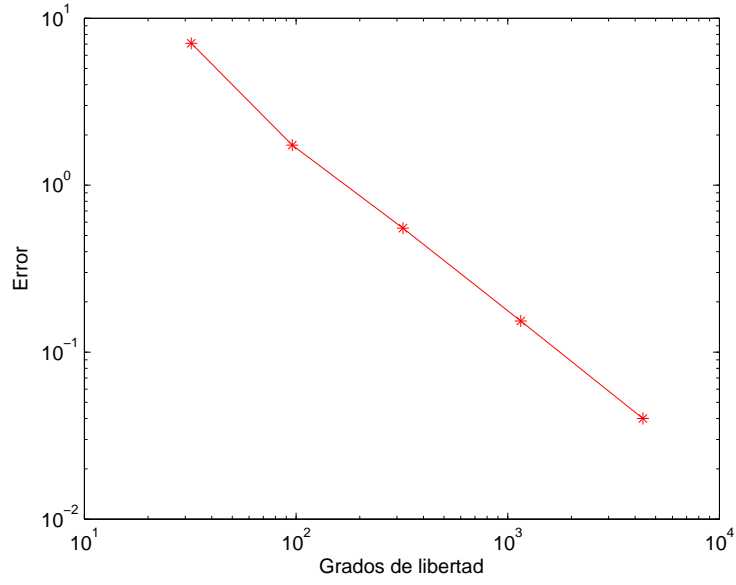


**Figura 5.4** Discretización del dominio exterior (32 dof).

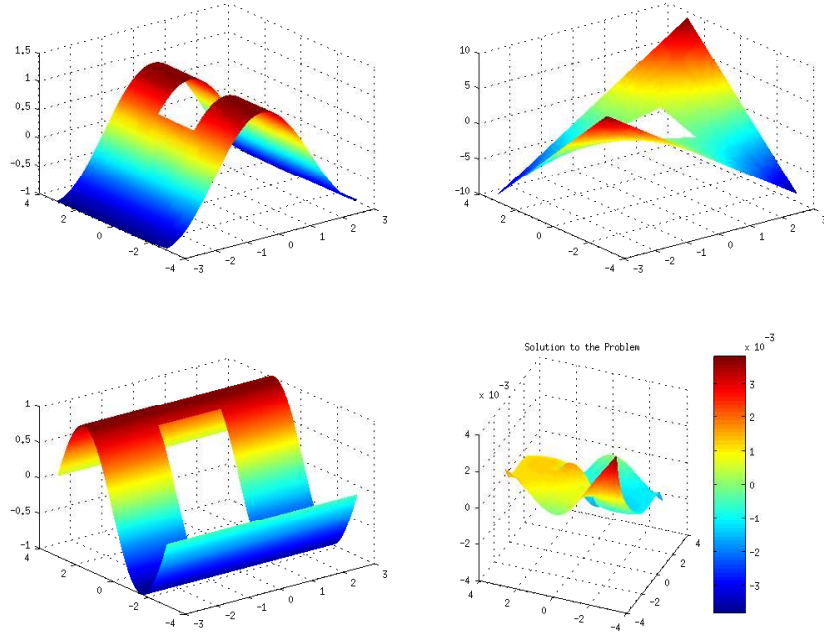
La Tabla 5.2 muestra las normas de la solución aproximada junto los errores y la tasa experimental de convergencia. En las columnas  $\theta_0$  y  $\theta_1$  se observa que el orden de convergencia en la norma de la energía es de  $O(h^1)$ . La Figura 5.5 muestra la gráfica de error  $e_1$  y la Figura 5.6 muestra el campo de desplazamiento  $\mathbf{u}(x, y)$ .

$N$ (dof)	$\ \mathbf{u}\ _1$	$\ \mathbf{u}\ _0$	$e_0$	$\theta_0$	$e_1$	$\theta_1$
32	5.320177e+06	1.780834e+01	7.076717e+00	0	1.630377e+06	0
96	5.701411e+06	1.784615e+01	1.735106e+00	1.2796	5.543362e+05	0.9820
320	5.824050e+06	1.856569e+01	5.529345e-01	0.9498	1.675946e+05	0.9936
1152	5.858335e+06	1.878070e+01	1.537548e-01	0.9992	4.732685e+04	0.9871
4532	5.867266e+06	1.883715e+01	4.003496e-02	1.0124	1.290950e+04	0.9774

**Tabla 5.2** Problema externo: normas, error  $e_0$  y  $e_1$ , y sus respectivas tasa de convergencia exp. de  $\mathbf{u}^h$ .



**Figura 5.5** Problema externo: Grados de libertad vs. error  $e_1$ .



**Figura 5.6** Problema externo: Campo de desplazamiento  $\mathbf{u}^u$  para  $N = 4532$  dof. Arriba: parte real desplazamiento eje  $x$  y eje  $y$ ; Abajo: parte imaginaria desplazamiento eje  $x$  y eje  $y$

### 5.3. Interacción fluido-estructura

Ahora presentaremos resultados numéricos de acople FEM/FEM o formulación (PV1) para el problema de interacción fluido-estructura presentado en la sección (2.1.2).

Para la implementación numérica del acople FEM/FEM necesitamos calcular  $\langle \mathcal{M}\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle_{\Gamma_a}$ , es decir, es necesario aplicar un operador tipo DtN map (en ingles Dirichlet to Neumann Map), como por ejemplo,  $\mathcal{M} := \tilde{V}^{-1}(I + \tilde{K})\tilde{u}$  donde  $\tilde{V}$  es el operador de capa simple y  $\tilde{K}$  el operador de capa doble (ver Sección 1.1). En este trabajo no se realizó la implementación de éste operador (ver Observación 3.0.1), por tal motivo consideremos un valor  $\mathcal{M} = \sigma(\tilde{\mathbf{u}})$  en  $\Gamma_a$  constante.

Hasta ahora, no se conoce un ejemplo teórico con solución exacta de la formulación **(PV1)**, por este motivo se calcula la normas de la energía de la solución aproximada para distintos  $h$  y usando el método de extrapolación de Aitken se calcula la norma exacta de la solución. A continuación mostraremos los resultados numéricos de la formulación **(PV1)** para un ejemplo de interacción acero-agua de mar. Se calcula el estimador de error a posteriori  $\Theta_h$  indicado en el Teorema 4.4

$$\Theta_h = (R_1^h + R_2^h + R_3^h + R_4^h + R_5^h + R_6^h)^{\frac{1}{2}}.$$

$$e_{\mathbf{u}} := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_1, \quad e_{\tilde{\mathbf{u}}} := \|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^h\|_1 \quad e_T = \sqrt{e_{\mathbf{u}}^2 + e_{\tilde{\mathbf{u}}}^2}.$$

indica los errores de las variables  $\mathbf{u}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}$ , y el error total, respectivamente.

**Ejemplo 1.** Consideramos un solido  $\bar{\Omega} = [-1, 1]^2$  hecho de acero, con los los siguientes parámetros: el coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , el módulo de Young  $E = 200GPa$  y  $\rho = 7800kg/m^3$ . Supongamos que el solido esta sumergido en agua de mar  $\tilde{\Omega} := [-5, 5]^2 / (-1, 1)^2$  con una densidad  $\rho_0 = 1020Kg/m^3$  y velocidad del sonido  $c_0 = 1500m/s$ . Consideremos

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0,001 \cos(w\sqrt{\rho}x) + i \sin(w\sqrt{\rho}x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como campo de desplazamiento incidente se utiliza la solución fundamental de la ecuación elastodinámica bidimensional.

La Tabla 5.3 muestra el error total en la norma de la energía y su respectivo estimador de error. La cuarta columna corresponde al cociente de éstos dos. Observe que el error y

el estimador tiende a ser proporcionales, confirmando numéricamente el Teorema 4.4. Ésto también puede confirmarse en la Figura 5.7.

En la Figura 5.7 se observa un comportamiento pre-asintóticos de la gráfica de error, es decir, se observa que el orden de convergencia se presenta a partir de un cierto  $h_0$ . Éste comportamiento es común para problemas que satisfacen la desigualdad de Gårding, como el analizado en éste trabajo.

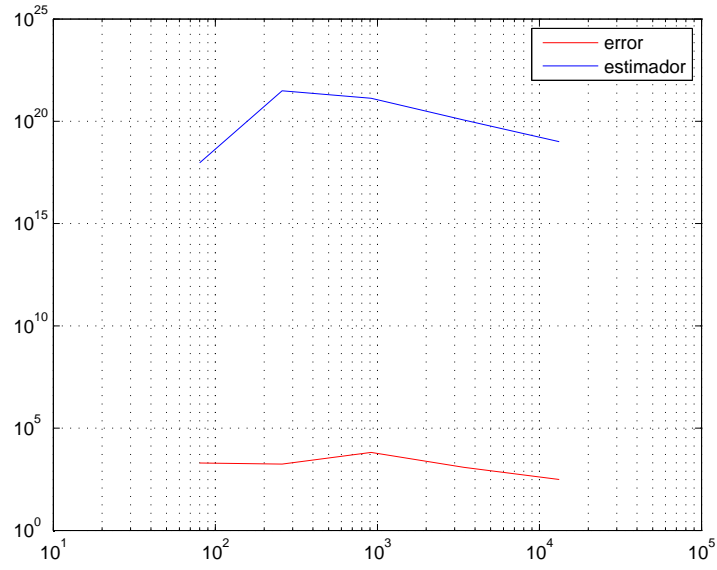
En la Tabla 5.4 se muestra para cada campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}$ , la norma de la energía, el error (extrapolado)  $e$  y su respectiva tasa de convergencia experimental. Teóricamente se espera un orden de convergencia de  $O(h)$ , lo cual se confirma numéricamente en este ejemplo (ver columnas  $\theta_{\mathbf{u}}$  y  $\theta_{\tilde{\mathbf{u}}}$ ).

$N_T$	$e_T$	$\Theta_h$	$e_T/\Theta_h$
80	1992,3313	9.379723e+17	2.1240e-15
258	1744,3636	3.090328e+21	564.4590e-21
914	6560,9560	1.328227e+21	0.4939e-17
3426	1214,7797	1.140098e+20	1.06550e-17
13250	309,5242	1.009490e+19	3.06614e-17

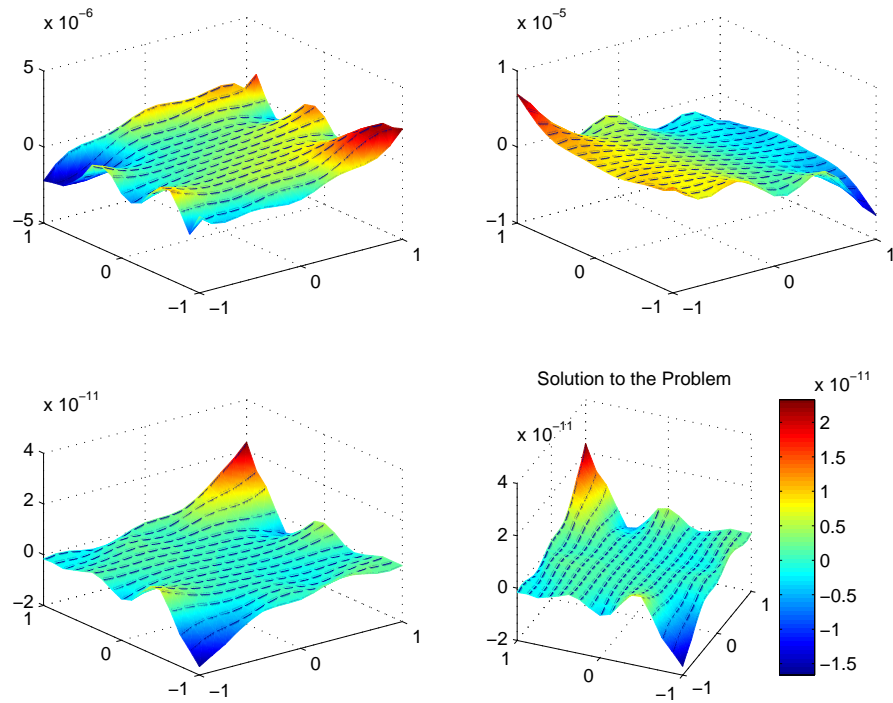
**Tabla 5.3** Acople FEM/FEM - Ejemplo 1: Error total  $e_T$ , estimador de error  $\Theta_h$  y constante de proporcionalidad para  $w = 90$ .

$N_{\mathbf{u}}$	$N_{\tilde{\mathbf{u}}}$	$\ \mathbf{u}\ _1$	$\ \tilde{\mathbf{u}}\ _1$	$e_{\mathbf{u}}$	$\theta_{\mathbf{u}}$	$e_{\tilde{\mathbf{u}}}$	$\theta_{\tilde{\mathbf{u}}}$
8	72	5.935179e+0	1.380321e+2	4.8035	-	1992.326	-
18	240	1.074576e+2	9.783378e+2	107.401	-3.8317	1741.054	0.1119
50	864	7.558182e+1	6.857759e+3	75.5014	0.3449	6560.522	-1.0356
162	3264	6.835490e+0	2.337535e+3	5.8797	2.1714	1214.766	1.2689
578	12672	3.641679e+0	2.020945e+3	1.0532	1.3520	309.523	1.0079

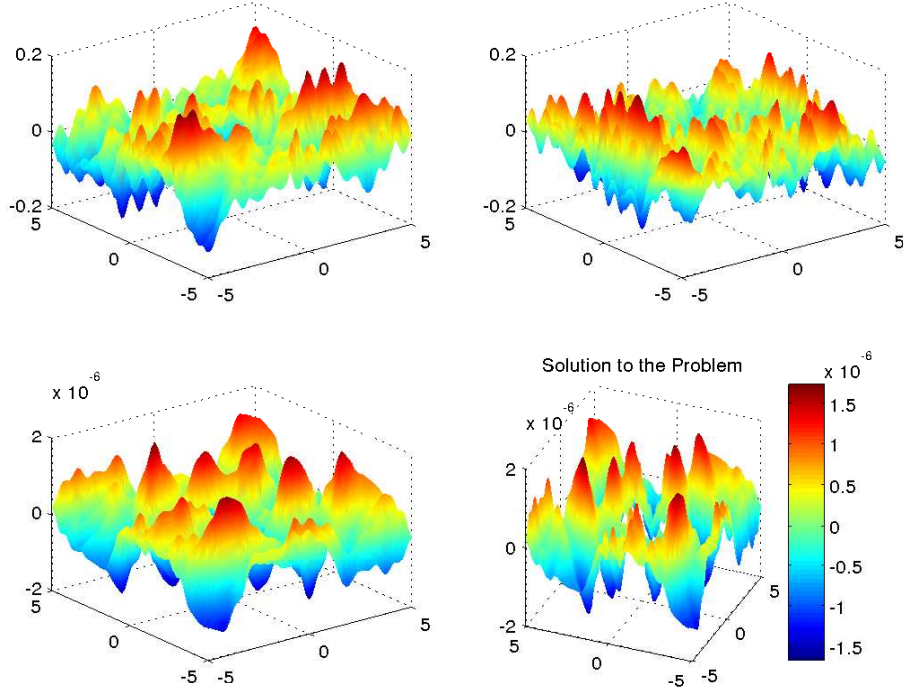
**Tabla 5.4** Acople FEM/FEM - Ejemplo 1: norma, error y tasa de convergencia del campo de desplazamiento interior  $\mathbf{u}$  y exterior  $\tilde{\mathbf{u}}$  usando  $w = 90$ .



**Figura 5.7** Acople FEM/FEM - Ejemplo 1: Grados de libertad vs. error total  $e_T$  y estimador de error  $\Theta_h$ .



**Figura 5.8** Acople FEM/FEM - Ejemplo 1: Campo de desplazamiento en el sólido (acero)



**Figura 5.9** Acople FEM/FEM - Ejemplo : Campo de desplazamiento en el fluido (agua de mar)

**Ejemplo 2.** Supongamos un sólido elástico  $\bar{\Omega} = [-1, 1]^2$  está sumergido en un fluido  $\tilde{\Omega} := [-5, 5]^2 \setminus (-1, 1)^2$ , ambos con los siguientes parámetros: el coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ , el módulo de Young  $E = 2000 GPa$  y  $\rho = 1 kg/m^3$ .

La Tabla 5.5 muestra el error total en la norma de la energía y su respectivo estimador de error. La cuarta columna corresponde al cociente de éstos dos. Observe que el error y el estimador tiende a ser proporcionales, confirmando numéricamente el Teorema 4.4. Ésto también puede confirmarse en la Figura 5.10.

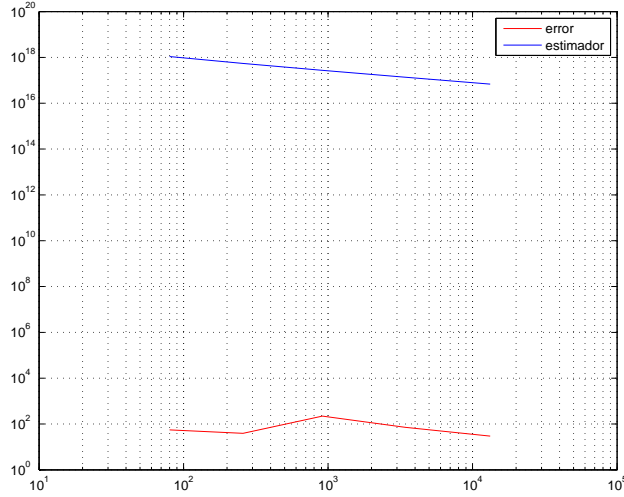
En la Figura 5.10 se observa un comportamiento pre-asintótico de la gráfica de error, es decir, se observa que el orden de convergencia se presenta a partir de un cierto  $h_0$ .

En la Tabla 5.6 se muestra para cada campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  y  $\tilde{\mathbf{u}}$ , la norma de la energía, el error (extrapolado)  $e$  y su respectiva tasa de convergencia experimental. Teóricamente se espera un orden de convergencia de  $O(h)$ , lo cual se confirma numéricamente en este ejemplo (ver columnas  $\theta_{\mathbf{u}}$  y  $\theta_{\tilde{\mathbf{u}}}$ ).



$N_T$	$e_T$	$\Theta_h$	$e_T/\Theta_h$
80	55.6615	1.095390e+18	0.5508e-20
258	39.3612	5.477045e+17	0.7186e-20
914	221.1256	2.738522e+17	8.0746e-20
3426	71.5513	1.369261e+17	5.2255e-20
13250	29.7331	6.846306e+16	4.3429e-20

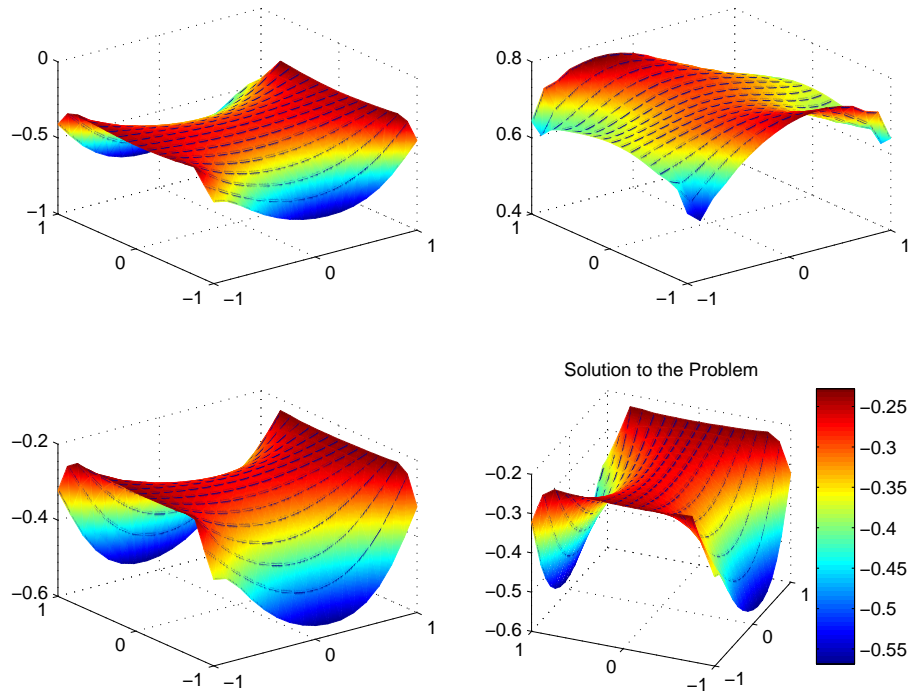
**Tabla 5.5** Error total  $e_T$  y Estimador de Error  $\Theta_h$  para  $w = 1$  .



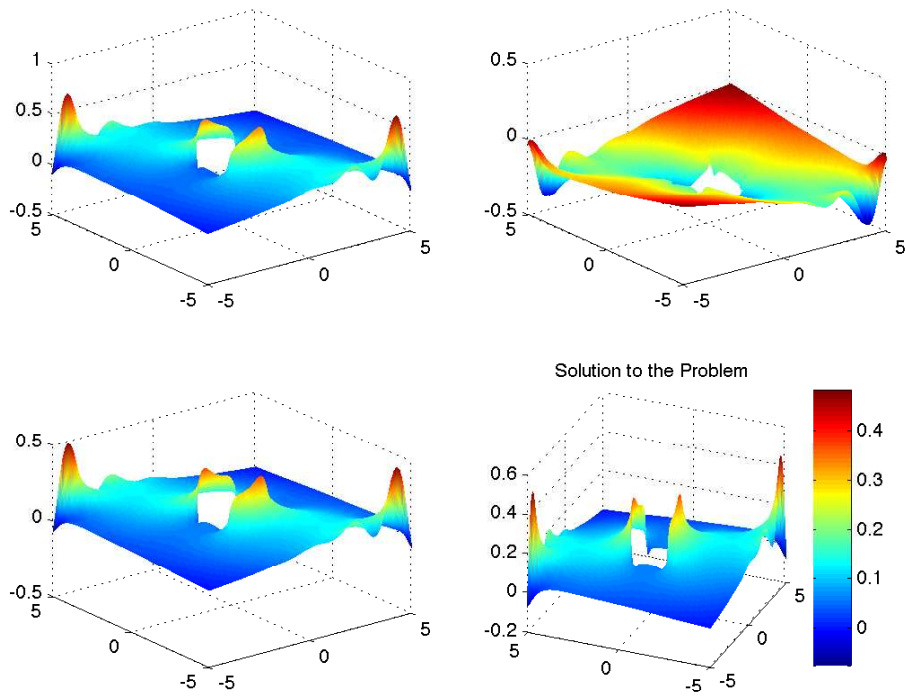
**Figura 5.10** Acople FEM/FEM - Ejemplo 2: Gráfica grados de libertad vs. error total  $e_T$  y estimador de error  $\Theta_h$

$N_u$	$N_{\tilde{u}}$	$\ u\ _1$	$\ \tilde{u}\ _1$	$e_u$	$\theta_u$	$e_{\tilde{u}}$	$\theta_{\tilde{u}}$
8	72	3.394292e+00	3.636289e+01	38.5194	-	40.1804	-
18	240	8.954432e+00	5.293863e+01	37.6176	0.0292	11.5857	1.0329
50	864	1.266411e+02	1.931076e+02	120.5931	-1.1403	185.3478	-2.1644
162	3264	4.716955e+01	8.559565e+01	27.0130	1.2727	66.2562	0.9739
578	12672	3.949010e+01	6.129094e+01	8.0127	0.9554	28.6331	0.9185

**Tabla 5.6** Acople FEM/FEM - Ejemplo 2: norma, error y tasa de convergencia exp. del campo de desplazamiento interior  $u$  y exterior  $\tilde{u}$  usando  $w = 1$ .



**Figura 5.11** Acople FEM/FEM - Ejemplo 2: Campo de desplazamiento  $u$  en el solido



**Figura 5.12** Acople FEM/FEM - Ejemplo 2: Campo de desplazamiento  $\tilde{u}$  en el fluido

## Referencias

1. G. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
2. J. Bielak and R. C. MacCamy. Symmetric finite element and boundary integral coupling methods for fluid-solid interaction. *Quart. Appl. Math.*, XLIX(1):107–119, 1991.
3. D. Braess. *Finite elements*. Cambridge University Press, 2007.
4. C. Carstensen, S. A. Funken, and E. P. Stephan. On the adaptive coupling of FEM and BEM in 2-d-elasticity. *Numer. Math.*, 77(2):187–221, 1997.
5. C. Carstensen and E. P. Stephan. A posteriori error estimates for boundary element methods. *Mathematics of Computation*, 64(210):483–500, 1995.
6. C. Carstensen and E. P. Stephan. Adaptive boundary element methods for some first kind integral equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(6):2166, 1996.
7. P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, 1978.
8. C. Domínguez, E. P. Stephan, and M. Maischak. FE / BE coupling for an acoustic fluid – structure interaction problem . Residual a posteriori error estimates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011.
9. C. Domínguez, E. P. Stephan, and M. Maischak. FE/BE coupling for an acoustic fluid-structure interaction problem. Residual a posteriori error estimates. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 89(3):299–322, 2012.
10. G. N. Gatica, G. C. Hsiao, and S. Meddahi. A residual-based a posteriori error estimator for a two-dimensional fluid–solid interaction problem. *Numerische Mathematik*, 114(1):63–106, Aug. 2009.
11. G. N. Gatica, A. Márquez, and S. Meddahi. Analysis of the coupling of BEM, FEM and mixed-FEM for a two-dimensional fluid–solid interaction problem. *Applied Numerical Mathematics*, 59(11):2735–2750, Nov. 2009.
12. G. C. Hsiao, R. E. Kleinman, and G. F. Roach. Weak solutions of fluid-solid interaction problems. *Math. Nachr.*, 218:139–163, 2000.
13. G. C. Hsiao and W. L. Wendland. The Aubin-Nitsche lemma for integral equations. *J. Integral Equations*, 3(4):299–315, 1981.

14. T. J. H. James R. Stewart\*. An a posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the helmholtz equation in exterior domains. *Division of Applied Mechanics*, 25(2):1–26, 1997.
15. C. Johnson and P. Hansbo. Adaptive finite element methods in computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 101(1-3):143–181, 1992. Reliability in computational mechanics (Kraków, 1991).
16. D. Jones. A uniqueness theorem in elastodynamics. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 37:121–142, 1984.
17. R. McCamy and E. Stephan. A boundary element method for an exterior problem for three-dimensional Maxwell’s equations. *Applicable Anal.*, 16(2):141–163, 1983.
18. W. L. Wendland. On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM. In *Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view*, volume 301 of *CISM Courses and Lectures*, pages 273–333. Springer, Vienna, 1988.